Chapitre 10

Probabilités conditionnelles

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
modéliser une situation (par un arbre par exemple)						
utiliser la formule des probabilités totales						
indépendance de deux évènements						

1) Probabilité conditionnelle

1 - 1) Étude d'une situation

On présente une situation qui sera utilisée tout au long du chapitre pour illustrer les notions abordées.

« Une maladie atteint 10% d'une population.

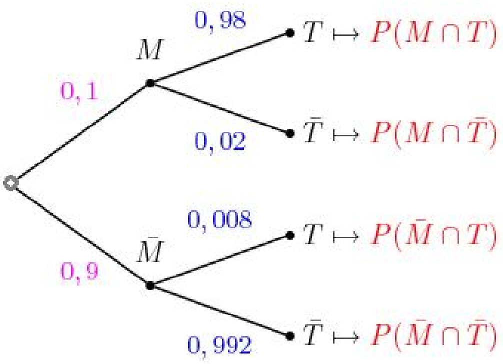
Un test de dépistage vise à déterminer si un individu est atteint ou pas par cette maladie.

Ce test devrait être positif si l'individu est malade, négatif dans le cas contraire, mais il est imparfait :
- la probabilité qu'un test soit positif sachant que l'individu est sain est 0,008 ;
- la probabilité qu'un test soit négatif sachant que l'individu est malade est 0,02.

On choisit un individu au hasard au sein de la population. On note M l'évènement « l'individu est atteint de la maladie » et T l'évènement « le test est positif ».

On appelle **valeur diagnostique d'un test** la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit malade. On appelle **fiabilité** d'un test la probabilité $P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap \bar{T})$. »

La situation présentée peut être schématisé par le graphique suivant, appelé **arbre pondéré** :



Dessin des branches :

- Au départ, il y a deux possibilités : malade (M) ou sain ($\bar{M}$) ;
- Au noeud M, il y a deux cas : T et $\bar{T}$, selon que le test est positif ou pas.
  De même à partir du noeud $\bar{M}$.

Inscription des probabilités :

- Sur la branche —— M, on inscrit $P(M) = 0,1$;
- Parmi les personnes malades, la probabilité d'avoir un test positif est 0,98, et donc, la probabilité d'avoir un test négatif est $1 - 0,98 = 0,02$.
- Sur la branche M —— T, on inscrit la probabilité, pour une personne malade, d'avoir un test positif : $0,98$.
  On la note $P_M(T)$, ce qui se lit « **probabilité de T sachant M** ».
- Sur la branche M —— $\bar{T}$, on inscrit la probabilité, pour une personne malade, d'avoir un test négatif : $0,02$.
  On la note $P_M(\bar{T})$, ce qui se lit « **probabilité de $\bar{T}$ sachant M** ».
- On procède de même depuis la branche $\bar{M}$.

Événement représenté par un chemin :

Le chemin —— M —— T représente l'évènement « la personne est malade ET son test est positif ». Cet évènement se note $M \cap T$.

En supposant qu'il y ait N personnes au départ, $0,1 \times N$ sont malades. Sur ces $0,1 \times N$ personnes, 98% auront un test positif, ce qui fera $0,98 \times 0,1 \times N$ personnes qui sont à la fois malades avec un test positif.

La probabilité que parmi ces N personnes, on ait une personne à la fois malade avec un test positif est : $P(M \cap T) = \dfrac{0,98 \times 0,1 \times N}{N} = 0,98 \times 0,1$.

Cela s'écrit : $P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M)$, soit encore : $P_M(T) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(M)}$.

On généralise cette idée.

1 - 2) Probabilité de A sachant B

Définition :

A et B sont deux évènements d'une même expérience aléatoire, avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de B sachant A est le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Conséquence

On déduit de cette définition que $P(A \cap B)$ peut s'écrire de deux manières :

Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$; si $P(B) \neq 0$, $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$

Exemple

Dans l'exemple du chapitre : rappelons que l'on cherche à déterminer la **valeur diagnostique** du test, définie comme la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit malade : avec les notations introduites, on cherche à calculer $P_T(M)$.
Or, $P_M(T)$ est connu, $P(M)$ l'est ; grâce à la remarque précédente, nous allons nous rapprocher de la solution.

$P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M) = 0,1 \times 0,98 = 0,098$

En « retournant » la formule grâce à la remarque précédente, $P(M \cap T) = P_T(M) \times P(T)$: reste à déterminer $P(T)$ pour déterminer $P_T(M)$.

1 - 3) Formule des probabilités totales

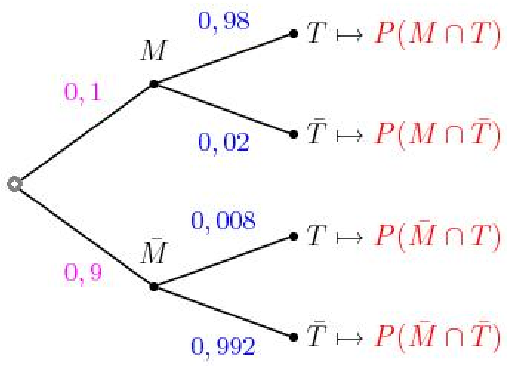
Exemple (suite) :

On reprend l'exemple présenté en début de chapitre. La partie précédente nous invite à déterminer $P(T)$.

L'évènement T (le test est positif) est atteint par deux chemins différents :

* ——— M ——— T qui représente l'évènement $P(M \cap T)$;

* ——— $\bar{M}$ ——— T qui représente l'évènement $P(\bar{M} \cap T)$;



Ainsi, T est la réunion de ces deux évènements **incompatibles** :

$$P(T) = P((M \cap T) \cup (\bar{M} \cap T)) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

Cas général :

Formule des probabilités totales :

Si Ω est la réunion d'évènements A_1, A_2, $\dots A_n$ deux à deux incompatibles, alors, pour tout évènement B :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Or, pour tout $i \in 1, 2, \dots, n$, si $P(A_i) \neq 0$, $P(B \cap A_i) = P(A_i) \times P_{(A_i)}(B)$

Cela donne :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{(A_1)}(B) + P(A_2) \times P_{(A_2)}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{(A_n)}(B)$$

Commentaires :

* Si Ω est la réunion d'évènements A_1, A_2, $\dots A_n$ deux à deux incompatibles, on dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ est une **partition** de Ω.

* Ce théorème est admis.

Fin de l'exemple :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= P_M(T) \times P(M) + P_{\bar{M}} \times P(\bar{M}) \\ &= 0,98 \times 0,1 + 0,008 \times 0,9 \\ &= 0{,}1052 \end{aligned}$$

La question était de déterminer la valeur diagnostique du test, à savoir $P_T(M)$.

Nous avions déterminé que $P(M \cap T) = P_T(M) \times P(T)$; reste à remplacer les valeurs connues :

$0,98 \times 0,1 = P_T(M) \times 0,1052$ et donc $P_T(M) = \dfrac{0,098}{0,1052} \approx 0,93.$

La valeur diagnostique du test est environ égale à 0,93.
Si le test était parfait, cette valeur diagnostique serait égale à 1.

On nous demandait aussi de déterminer la **fiabilité** du test : $P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap \bar{T})$.

$P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0,1 \times 0,98 + 0,9 \times 0,992 \approx 0,99$

La fiabilité du test est environ égale à 0,99.
Là aussi, si le test était parfait, elle serait égale à 1.

1 - 4) Construction et utilisation des arbres pondérés

Voici en résumé les « règles » à respecter lorsqu'on a un arbre pondéré :

1. La somme des probabilités des branches partant d'un même noeud est égale à 1.

2. La probabilité d'un évènement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

3. La probabilité d'un évènement E est égale à la somme des probabilités des évènements associés aux chemins qui mènent à E.

2) Indépendance de deux évènements

2 - 1) Évènements indépendants

A et B sont deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que
$P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Dans certaines conditions, le fait de savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit.

On dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que $P_A(B) = P(B)$.

L'évènement $A \cap B$, qui vérifie $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ est donc tel que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Mais alors, $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, ce qui veut dire que B est indépendant de A.

D'où la **définition** :

> Dire que deux évènements A et B sont indépendants revient à dire que
>
> $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

COMMENTAIRES :

* La notion d'indépendance est liée à la loi de probabilité P.

* Il ne faut pas confondre **indépendance** et **incompatibilité**.
  Supposons que A et B soient deux évènement incompatibles ; alors $A \cap B = \emptyset$ et donc $P(A \cap B) = 0$.
  Or, si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, $P(A) \times P(B) \neq 0$ et donc la relation $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ n'est pas vérifié : les évènements A et B ne sont pas indépendants.

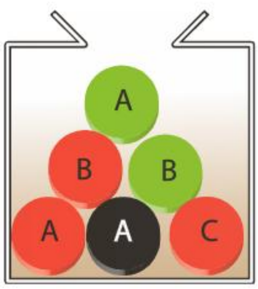
* Intuitivement, on peut se dire que les évènements A et B sont indépendants, si le fait de connaître A ne donne pas de nouvelle information sur la connaissance de B.

EXEMPLE :

On tire au hasard un jeton de l'urne ci-contre.

On note respectivement R, V, N les évènements :
« le jeton est rouge », « le jeton est vert », « le jeton est noir ».

A, B et C sont les évènements associés au tirage de la lettre indiquée.



Les évènements R et A sont-ils indépendants ?

Pour cela, on va comparer $P(R)$ à $P_A(R)$ (et donc on a besoin de calculer $P_A(R)$) :

* On a 3 boules rouges sur 6 boules donc : $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
* On a 3 boules « A » sur 6 boules donc : $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
* On a 1 seule boule avec à la fois rouge et A sur 6 boules donc : $P(R \cap A) = \frac{1}{6}$

Par définition, $P_A(R) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)}$; on obtient, en remplaçant les valeurs :

$P_A(R) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$: on constate que $P_A(R) \neq P(R)$, ce qui signifie que les évènements R et A ne sont pas indépendants : le fait de savoir que le jeton porte la lettre A amène une nouvelle information. En effet, on a une chance sur deux que le jeton tiré soit rouge ; si on sait que le jeton porte la lettre A, on sait qu'on a une chance sur trois qu'il soit rouge ; c'est en cela qu'on a une nouvelle information qui justifie que les évènements ne sont pas indépendants.

Les évènements R et B sont-ils indépendants ?

Pour cela, on va comparer $P(R)$ à $P_B(R)$ (et donc on a besoin de calculer $P_B(R)$) :

* On a 3 boules rouges sur 6 boules donc : $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
* On a 2 boules « B » sur 6 boules donc : $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
* On a 1 seule boule avec à la fois rouge et B sur 6 boules donc : $P(R \cap B) = \frac{1}{6}$

Par définition, $P_B(R) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)}$; on obtient, en remplaçant les valeurs :

$P_B(R) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$: on constate que $P_B(R) = P(R)$, ce qui signifie que les évènements R et B sont indépendants : le fait de savoir que le jeton porte la lettre B n'amène pas de nouvelle information. En effet, on a une chance sur deux que le jeton tiré soit rouge ; si on sait qu'il porte la lettre B, on a une chance sur deux qu'il soit rouge ... rien de nouveau !

On remarque au passage que le fait de dire si deux évènements sont indépendants ou non n'est pas toujours facile à prévoir. On peut se rendre compte que c'était évident après coup parfois ...

2 - 2) Passage aux évènements contraires

Théorème :

Si deux évènements A et B sont indépendants, il en est de même pour les évènements :

1. $\boxed{A \text{ et } \overline{B}}$ 2. $\boxed{\overline{A} \text{ et } B}$ 3. $\boxed{\overline{A} \text{ et } \overline{B}}$

Démonstration - $\boxed{\text{BAC}}$:

1. A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
   Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers ; d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
   Et donc $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$, ce qui donne : $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
   Ainsi : $P(\bar{A} \cap B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B)$: cela montre que $\bar{A}$ et B sont indépendants.

2. La démonstration est analogue : il suffit d'échanger les rôles de A et B.

3. D'après 1., $\bar{A}$ et B sont indépendants ; en utilisant 2. avec $\bar{A}$ et B, on obtient que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.