Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

   Puisque $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, il vient, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x) = 1$

   Puisque $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, il vient, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x) = 0$

   Graphiquement cela signifie que les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$ sont deux asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_1$ au voisinage respectivement de moins et plus l'infini.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

   $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\times 1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.

   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

   $f_1' = -\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

   Cette expression étant toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en résulte que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

   $$I = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$$

   I s'interprète graphiquement comme la mesure en unité d'aires du domaine limité par $\mathscr{C}_1$, l'axe des x et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. C'est l'aire du rectangle de côté 1 et de longueur $\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$ qui vaut à peu près 0,62 unité d'aire (ce qui se vérifie visuellement sur l'annexe).

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.

Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.

On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

   $f_1(x) + f_{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} + \dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} = 1$

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

   $y_K = \dfrac{y_M + y_P}{2} = \dfrac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$

   Le point K est donc un point de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.

   Il résulte de la question précédente que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

   Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient

$$\mathscr{A} = 2\int_0^1 f_1(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}x = 2\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 1 \approx 0,24.$$

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

   Vrai : Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $e^{-kx} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-kx} > 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+e^{-kx}} < 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

   Faux : On a vu que la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

   Vrai : Car si $k \geqslant 10$ alors $-\dfrac{1}{2}k \leqslant -5$ puis $e^{-\frac{1}{2}k} \leqslant e^{-5}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $1 + e^{-\frac{1}{2}k} \leqslant 1 + e^{-5}$.

   Finalement :

$$0,99 < 0,9933 \leqslant \frac{1}{1+e^{-5}} \leqslant \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{2}k}} = f_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentations graphiques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$ des fonctions f_1 et f_{-1}