DS commun n°1 **classe de T^{le}** **Mathématiques**

Nom / Prénom : ______________________________

La qualité de la rédaction sera prise en compte sur l'ensemble du devoir.

***Exercice* 1** *:* / 8 points

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = \frac{2}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$
2. Étudier l'éventuel sens de variation de cette suite.
3. Montrer que cette suite est bornée.

***Exercice* 2** *:* / 12 points

1. Justifier que : « pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant x$ » est faux.
2. On veut démontrer la proposition : « pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant x + 1$ ».
   (a) Étudier le signe du trinôme $x^2 + x + 1$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 1 \geqslant x$
   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x + 1 \geqslant \sqrt{x}$
3. On se propose par la suite d'utiliser les propriétés de convexité / concavité des fonctions pour démontrer des inégalités plus intéressantes.

   On pose, pour tout réel x positif, $f(x) = \sqrt{x}$; on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
   (a) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Étudier la convexité de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Conclure quant à cette inégalité : « pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ »
4. En vous inspirant de la méthode de la question précédente, justifier que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{4}x + 1$