Cours de mathématiques pour la Terminale S

Savoir-Faire par chapitre

avec corrigé

Florent Girod [1]

Année scolaire 2015 / 2016

1. Externat Notre Dame - Grenoble

Table des matières

I Savoir-Faire **2**
1) Suites numériques 3
1 - 1) effectuer un raisonnement par récurrence 3
1 - 2) démontrer qu'une suite est géométrique ou arithmétique 3
1 - 3) étudier la monotonie d'une suite 3
1 - 4) démontrer qu'une suite admet une limite 3
1 - 5) déterminer la limite d'une suite 4
2) Limites et continuité 5
2 - 1) déterminer la limite d'une fonction à l'infini 5
2 - 2) déterminer la limite infinie d'une fonction en un réel a 5
2 - 3) utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue 5
3) Compléments sur les fonctions numériques 6
3 - 1) dériver des fonctions 6
3 - 2) connaître et utiliser les fonctions sinus et cosinus 6
4) Fonction exponentielle 7
4 - 1) propriétés numériques de la fonction exponentielle 7
4 - 2) propriétés de la fonction exponentielle 7
4 - 3) calculs de limites avec la fonction exponentielle 7
4 - 4) étude de fonctions définies à partir de la fonction exponentielle 7
4 - 5) résolution d'équations utilisant la fonction exponentielle 8
5) Fonction logarithme népérien 9
5 - 1) fonction logarithme népérien comme fonction réciproque de la fonction exponentielle 9
5 - 2) propriétés numériques de la fonction logarithme népérien 9
5 - 3) calculs de limites avec la fonction logarithme népérien 9
5 - 4) étude de fonctions définies à partir de la fonction logarithme népérien 10
5 - 5) résolution d'équations utilisant la fonction logarithme népérien 10
6) Calcul intégral 11
6 - 1) intégrale et aire sous la courbe 11
6 - 2) détermination de primitives de fonctions 11
6 - 3) propriétés de l'intégrale 12
6 - 4) valeur moyenne d'une fonction 12
7) Les nombres complexes 13
7 - 1) forme algébrique d'un nombre complexe 13
7 - 2) résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ 13
7 - 3) forme exponentielle d'un nombre complexe 13
7 - 4) interprétation géométrique d'un nombre complexe 13
8) Droites et plans de l'espace - Vecteurs 15
8 - 1) étude de la position relative de droite(s) et de plan(s) 15

8 - 2) vecteurs de l'espace 15
8 - 3) formules dans un repère de l'espace 15
8 - 4) représentation paramétrique d'une droite, d'un plan 15
9) Produit scalaire de l'espace 16
9 - 1) calculs de produits scalaires 16
9 - 2) équation cartésienne d'un plan 16
9 - 3) intersection de droites et de plan 16
10) Probabilités conditionnelles 17
10 - 1) modéliser une situation (par un arbre par exemple) 17
10 - 2) utiliser la formule des probabilités totales 17
10 - 3) indépendance de deux évènements 17
11) Lois de probabilité continues 18
11 - 1) définition d'une loi à densité 18
11 - 2) utiliser la loi uniforme 18
11 - 3) utiliser la loi exponentielle 18
11 - 4) loi normale centrée réduite : calculs 19
11 - 5) loi normale centrée réduite : valeurs remarquables 19
11 - 6) loi normale à paramètres 19
12) Échantillonnage et estimation 20
12 - 1) centrer et réduire une loi binomiale 20
12 - 2) déterminer et utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique 20
12 - 3) déterminer et utiliser un intervalle de confiance 20

II Réponses aux exercices **21**

Première partie

Savoir-Faire

1) Suites numériques

1 - 1) effectuer un raisonnement par récurrence

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = r.u_n$, où r est un réel quelconque.

Démontrer que pour tout nombre entier n, $u_n = r^n$

correction page 22

1 - 2) démontrer qu'une suite est géométrique ou arithmétique

Soit (p_n) la suite définie pour tout nombre entier supérieur à 1 par : $p_1 = \frac{4}{5}$ et $p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$: montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison.

En déduire une expression de u_n puis de p_n (n entier supérieur à 1)

correction page 22

1 - 3) étudier la monotonie d'une suite

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n par :
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2$
- $v_n = n^2 + 3n - 1$

Étudier la monotonie de ces suites.

correction page 22

1 - 4) démontrer qu'une suite admet une limite

Soit (u_n) la suite définie par :
* $u_0 = 0$
* $u_1 = 0,1$
* $u_2 = 0,11$
* $u_3 = 0,111$

  ...
* $u_n = 0,\underbrace{111\ldots1}_{n\ fois}$

Étudier la convergence de la suite (u_n)

correction page 23

1 - 5) déterminer la limite d'une suite

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim \frac{(-1)^n}{n}$
- $\lim n + (-1)^n$
- $\lim \frac{n^2+3n-1}{5-n^2}$
- $\lim \frac{1}{5} + 7\left(\frac{4}{5}\right)^n$

correction page 23

2) Limites et continuité

2 - 1) déterminer la limite d'une fonction à l'infini

Déterminer les limites suivantes :
- $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$
- $\lim_{x \to +\infty} x + \sin(x)$
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

correction page 26

2 - 2) déterminer la limite infinie d'une fonction en un réel a

Déterminer les limites suivantes :
- $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{5-x}{1-x}$
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{5-x}{(1-x)^2}$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

correction page 26

2 - 3) utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue

En étudiant le fonction $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 20$, justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet trois solutions, dont on donnera un encadrement à partir du tableau de variation ; peut-on donner les valeurs exactes ?

Mêmes questions avec l'équation $f(x) = 100$

correction page 27

3) Compléments sur les fonctions numériques

3 - 1) dériver des fonctions

Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt{1-x}$
- $f(x) = (1-x)^3$
- $f(x) = e^{x^2-3x+1}$
- $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

correction page 24

3 - 2) connaître et utiliser les fonctions sinus et cosinus

Étudier la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

correction page 24

4) Fonction exponentielle

4 - 1) propriétés numériques de la fonction exponentielle

simplifier le plus possible les écritures suivantes :

* $\dfrac{e^7}{e^5}$

* $\dfrac{e^7 - e^5}{e^5}$

* $(e^4)^2.e^5$

* $e^{-13}.e^{10}$

correction page 29

4 - 2) propriétés de la fonction exponentielle

Écrire toutes les propriétés de la fonction exponentielle.

Les démontrer à partir de la relation $e^{a+b} = e^a.e^b$

correction page 29

4 - 3) calculs de limites avec la fonction exponentielle

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} - e^x}$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^x}$

correction page 29

4 - 4) étude de fonctions définies à partir de la fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x^2+2x+3}$

1. Étudier les variations de f
2. Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition

correction page 30

4 - 5) résolution d'équations utilisant la fonction exponentielle

Résoudre les équations suivantes :

1. $10 - 3e^{-x} > 0$
2. $1 - 0,3^n \geq 0,9$

correction page 31

5) Fonction logarithme népérien

5 - 1) fonction logarithme népérien comme fonction réciproque de la fonction exponentielle

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x = 8$
2. $e^{x^2} = 8$
3. $ln(x) = ln(x + 8)$
4. $ln(x) = -4$
5. $ln(2x) = ln(x - 1)$

correction page 32

5 - 2) propriétés numériques de la fonction logarithme népérien

Exprimer les nombres suivants en fonction de ln(x) (où x est un réel strictement positif) :

1. $ln\left(x^4\right)$
2. $ln\left(\frac{e}{x}\right)$
3. $ln\left(\frac{\sqrt{x}}{e}\right)$
4. $ln\left(e.x\right)$
5. $ln\left(\frac{e}{\sqrt{x}}\right)$

correction page 32

5 - 3) calculs de limites avec la fonction logarithme népérien

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0^+} ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim_{x\to +\infty} ln\left(x^2 - 5x + 3\right)$
3. $\lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{x^2+5x-2}{2x^2-3}\right)$
4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x + 1}$
5. $\lim_{x\to 0} x.ln(x)$

correction page 32

5 - 4) étude de fonctions définies à partir de la fonction logarithme népérien

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

1. domaine de définition
2. parité ?
3. limite aux bornes
4. sens de variation
5. extremum ?
6. équation de la tangente en 0

correction page 33

5 - 5) résolution d'équations utilisant la fonction logarithme népérien

Résoudre les équations suivantes :

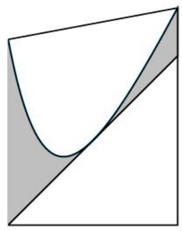
1. $1 - (0,7)^n > 0,95$
2. $e^x = 8$
3. $e^{2x} + e^x - 1 = 0$

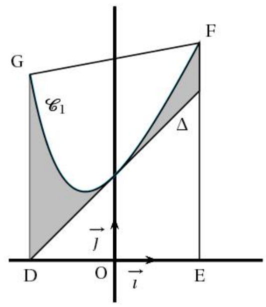
correction page 33

6) Calcul intégral

6 - 1) intégrale et aire sous la courbe

La figure ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}_1$ qui représente la fonction $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$ et de la droite Δ d'équation $y = x + 2$ (comme l'indique la figure de droite ci-dessous). Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.





Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :
- D est le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2\,;\,0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

Déterminer l'aire de cette zone grisée (exprimée en unités d'aire).

correction page 35

6 - 2) détermination de primitives de fonctions

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x(x^2 - 3)^2$
2. $g(x) = \dfrac{x}{3x^2 - 4}$
3. $h(x) = \dfrac{x + 3}{(x^2 + 6x - 7)^3}$
4. $i(x) = e^{-3x}$
5. $j(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x - 5}}$

correction page 35

6 - 3) propriétés de l'intégrale

1. Comment calculer $\int_5^4 t^2 dt$?
2. Calculer (astucieusement !) $\int_0^5 t^2 dt + \int_0^5 (1 - t^2) dt$
3. Démontrer que si $f \geq g$ sur [a ;b], alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$

correction page 35

6 - 4) valeur moyenne d'une fonction

Déterminer la valeur moyenne de la fonction proposée, sur l'intervalle donné :

1. $f(x) = x^2$ sur $[0\ ;\ 1]$
2. $f(x) = x^2$ sur $[-1\ ;\ 0]$
3. $f(x) = x^2$ sur $[-1\ ;\ 1]$
4. $f(x) = x^2$ sur $[4\ ;\ 5]$
5. $f(x) = x^2$ sur $[4\ ;\ 8]$

correction page 36

7) Les nombres complexes

7 - 1) forme algébrique d'un nombre complexe

$z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$

Donner la forme algébrique de :

1. $z_3 = z_1 - z_2$
2. $z_4 = z_1.z_2$
3. $z_5 = \dfrac{z_1}{z_2}$

correction page 37

7 - 2) résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

On cherche à résoudre l'équation $z^3 + 8 = 0$

1. Donner les valeurs des réels a et b tels que $z^3 + 8 = (z - 2)(z^2 + az + b)$
2. Résoudre l'équation $z^3 + 8 = 0$

correction page 37

7 - 3) forme exponentielle d'un nombre complexe

1. donner la forme algébrique de $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. donner la forme exponentielle de $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et de $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
3. donner la forme exponentielle de $z = -5\Big(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\ \sin(\frac{\pi}{5})\Big)$

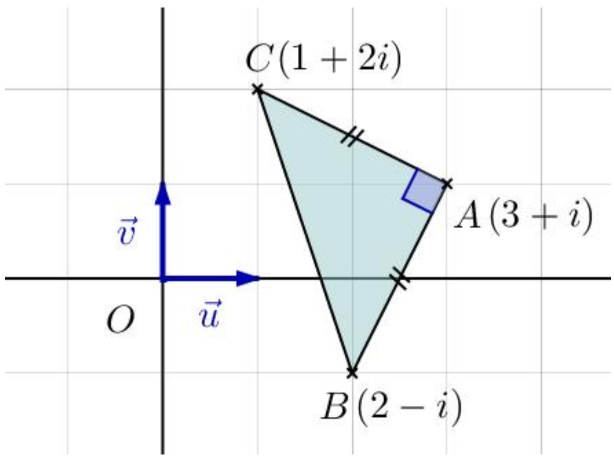
correction page 37

7 - 4) interprétation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i,\ z_B = 2 - i \text{ et } z_C = 1 + 2i$$

Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.



correction page 38

8) Droites et plans de l'espace - Vecteurs

8 - 1) étude de la position relative de droite(s) et de plan(s)

A partir d'un cube, et des milieux des arêtes :

– donner deux droites coplanaires (deux types à identifier)

– donner deux droites **non sécantes et non parallèles**

– donner une droite et un plan parallèles (deux cas de figure)

– donner une droite et un plan sécants

– donner deux plans sécants

– donner deux plans parallèles

correction page 40

8 - 2) vecteurs de l'espace

Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1)$ sont-ils colinéaires ?

Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(2; -2; 1)$ et $\vec{w}(7; 2; 11)$ sont-ils coplanaires ?

correction page 40

8 - 3) formules dans un repère de l'espace

– Formules à retenir dans un repère du plan (et leurs conditions d'application)

– Application au cube (longueur de la diagonale par exemple).

correction page 41

8 - 4) représentation paramétrique d'une droite, d'un plan

Donner l'équation de la droite passant par $A(0; 2; -1)$ et dirigée par $\vec{u}(1; -2; 3)$

Dire si le point $B(1; 2; 5)$ appartient à cette droite ou pas.

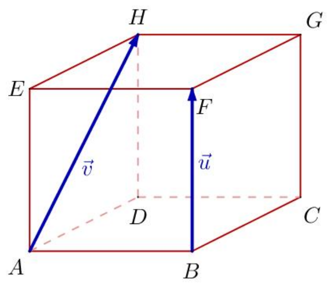
correction page 41

9) Produit scalaire de l'espace

9 - 1) calculs de produits scalaires

Déterminer $\vec{u}.\vec{v}$:

* en se ramenant à un problème plan ;
* en décomposant les vecteurs (par une relation de Chasles) ;
* en utilisant les coordonnées dans un repère orthonormé.



correction page 42

9 - 2) équation cartésienne d'un plan

Soient $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $C(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ trois points du plan ; justifier que ces points définissent un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.

correction page 42

9 - 3) intersection de droites et de plan

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y + z = 2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$ Montrer que $\mathcal{D}$ est (strictement) parallèle à $\mathcal{P}$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y + z = 2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.

correction page 43

10) Probabilités conditionnelles

10 - 1) modéliser une situation (par un arbre par exemple)

Une urne contient trois boules bleues et une noire. On effectue un tirage sans remise jusqu'à obtenir la boule noire. On note R le rang de sortie de la boule noire. Donner la loi de probabilité de R. (on pourra utiliser un arbre pour illustrer cette propriété)

Remarque : les boules sont indiscernables au toucher.

Pour aller plus loin : que se passe-t-il s'il y a remise ?

correction page 44

10 - 2) utiliser la formule des probabilités totales

On a trois boules rouges et une noire. On effectue un tirage : si la boule est noire, on la remet et on effectue un nouveau tirage. Si la boule est rouge, on la garde et on effectue un nouveau tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage ?

correction page 45

10 - 3) indépendance de deux évènements

Deux approches :
- une approche « intuitive » où l'on justifie qu'il y a indépendance de réalisation d'événements ;
- une approche numérique où un calcul justifie que deux événements sont indépendants ou non.

1. Donner une situation où deux événements apparaissent indépendants.

2. Soit la situation suivante : on considère les nombres entiers de 1 à 100.
   - on note A l'événement « le nombre est pair » ;
   - on note B l'événement « le nombre est un multiple de 5 ».

   Les événements A et B sont-ils indépendants ?

   Même question si on considère les nombres entiers de 1 à 101.

correction page 45

11) Lois de probabilité continues

11 - 1) définition d'une loi à densité

1. Déterminer la valeur de k pour que la fonction $f(x) = k.x^2$ soit une loi à densité sur l'intervalle $[1\ ;\ 8]$
2. On se place sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$: existe-t-il une valeur de k telle que $f(x) = \frac{k}{x^2}$ soit une loi à densité ?
3. On se place sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$: existe-t-il une valeur de k telle que $f(x) = \frac{k}{x}$ soit une loi à densité ?

correction page 46

11 - 2) utiliser la loi uniforme

Monsieur Lettré achète son journal de l'après-midi du lundi au vendredi entre 16 h et 16 h 30 devant son domicile.

L'heure d'achat du journal suit une loi uniforme sur l'intervalle $[16\ ;\ 16,5]$

1. Quelle est la densité définissant la loi de probabilité pour l'heure d'achat du journal ?
2. Lundi midi : quelle est la probabilité que M Lettré achète son journal entre 16 h 20 et 16 h 30 ?
3. Vendredi 16 h 15 : le gérant du kiosque n'a pas encore vu M Lettré. Quelle est la probabilité que celui-ci achète son journal entre 16 h 20 et 16 h 30.
4. Mercredi, 15 h : à quelle heure le gérant peut-il « espérer » voir M Lettré ?

correction page 46

11 - 3) utiliser la loi exponentielle

– X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ ; sachant que $P(X < 4) = 0,3$, donner la valeur de λ.
– Y est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ ; sachant que $E(Y) = 7$, donner la valeur de λ.
– Démontrer qu'une loi exponentielle est une loi sans vieillissement.

correction page 47

11 - 4) loi normale centrée réduite : calculs

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Calculer :

1. $P(X < 2)$
2. $P(1 < X < 2)$
3. $P(X > 1)$
4. le réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(X < k) = 0,9$
5. le réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(-k < X < k) = 0,95$

correction page 47

11 - 5) loi normale centrée réduite : valeurs remarquables

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

1. A quoi est égal $P(-1 < X < 1)$?
2. Donner la valeur du réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(-k < X < k) = 0,95$
3. A quoi est égal $P(-3 < X < 3)$?

correction page 47

11 - 6) loi normale à paramètres

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(10\ ;\ 25)$.

1. Calculer $P(5 < X < 15)$; comment contrôler ce résultat (sans faire de calcul) ?
2. Calculer $P(X < 15)$
3. Calculer $P(5 < X)$
4. Vérifier la cohérence de ces trois calculs.

correction page 48

12) Échantillonnage et estimation

12 - 1) centrer et réduire une loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,12$, quelle variable « centrée réduite » lui est associée ?

correction page 49

12 - 2) déterminer et utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique

On vous indique que 12 % des personnes sont des gauchers. Que peut-on penser du fait qu'il y ait 8 gauchers parmi les 50 premiers du classement ATP de Tennis ? (on pourra utiliser un intervalle de fluctuation pour argumenter la réponse).

correction page 49

12 - 3) déterminer et utiliser un intervalle de confiance

Un sondage précédent le second tour d'élections présidentielles indique que le candidat A a 51 % des intentions de vote. Sachant que le sondage a interrogé 1 000 personnes, montrer que l'on n'est pas sûr que le candidat A sera effectivement élu.

Combien de personnes aurait-il fallu interroger (avec un résultat de sondage identique) pour « être sûr » que ce candidat soit vainqueur au second tour ?

correction page 49

Deuxième partie

Réponses aux exercices

Suites numériques

Effectuer un raisonnement par récurrence

initialisation : si on remplace n par 0 dans la formule proposée, on obtient : $u_0 = r^0 = 1$

Or, il est dit dans la consigne que $u_0 = 1$: la formule proposée fonctionne pour $n = 0$; l'initialisation est vérifiée au rang $n = 0$

hérédité : soit n un entier quelconque (fixé) ; on suppose que pour cette valeur de n, la relation est vérifiée, donc que $u_n = r^n$

On a comme objectif de montrer que la relation est alors vérifiée au rang suivant, le rang $n+1$; on cherche donc à démontrer la relation : $u_{n+1} = r^{n+1}$

Ainsi, $u_{n+1} = r.u_n = r.r^n = r^{n+1}$

La relation cherchée est bien vérifiée : l'hérédité est démontrée.

conclusion : la relation est vérifiée pour $n = 0$, elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est vérifiée pour entier n.

Ainsi, pour tout nombre entier n, $u_n = r^n$

Démontrer qu'une suite est géométrique ou arithmétique

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{3}{5}p_n + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{3}{5}(u_n + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{3}{5}u_n + \tfrac{3}{10} + \tfrac{2}{10} - \tfrac{5}{10} \\ &= \tfrac{3}{5}u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$.

On sait exprimer un terme d'une suite géométrique : $u_n = u_1\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

On calcule u_1 : $u_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8-5}{10} = \frac{3}{10}$; donc $u_n = \frac{3}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

Comme $p_n = u_n + \frac{1}{2}$, on conclut que $p_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ pour tout nombre entier supérieur à 1.

Etudier la monotonie d'une suite

On calcule $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = u_n + n^2 - u_n = n^2 \geqslant 0$: la suite (u_n) est croissante.

On calcule $v_{n+1} - v_n$:

$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - 1 - (n^2 + 3n - 1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - 1 - n^2 - 3n + 1 = 2n + 4 > 0$

On conclut que cette suite est croissante.

Démontrer qu'une suite admet une limite

La suite (u_n) est croissante : en effet, on ajoute une valeur positive pour passer d'un terme au suivant.

Cette suite est majorée : 1 est un majorant ; 0,2 est aussi un majorant.

Une suite **croissante** et **majorée** étant convergente, on conclut que la suite est **convergente**.

Déterminer la limite d'une suite

- $\lim \frac{(-1)^n}{n}$

  Pour tout entier n strictement positif, $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$

  Or, les suites $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$ tendent vers 0 ; par le théorème d'encadrement, on conclut que la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0.

- $\lim n + (-1)^n$

  Pour tout entier n, $n + (-1)^n \geqslant n - 1$; or, la suite de terme général $n - 1$ diverge vers $+\infty$. Par le théorème de comparaison, on conclut que la suite de terme général $n + (-1)^n$ diverge vers $+\infty$.

- $\lim \frac{n^2+3n-1}{5-n^2}$

  Par les théorèmes généraux, on a une forme indéterminée (type « $\frac{\infty}{\infty}$ ») : la méthode consiste à factoriser les termes prépondérants au numérateur et dénominateur :

  $$\frac{n^2+3n-1}{5-n^2} = \frac{n^2\left(1+\frac{3n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{5}{n^2}-1\right)} = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n^2}-1}$$

  Le numérateur tend vers 1, le dénominateur vers -1 : par quotient, on conclut que la suite de terme général $\frac{n^2+3n-1}{5-n^2}$ tend vers -1.

- $\lim \frac{1}{5} + 7\left(\frac{4}{5}\right)^n$

  $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique dont la raison est $\frac{4}{5}$: comme $-1 < \frac{4}{5} < 1$, on sait que cette suite tend vers 0.

  Par produit, $7\left(\frac{4}{5}\right)^n$ tend vers 0 ; on conclut, par somme, que la suite de terme général $\frac{1}{5} + 7\left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge vers $\frac{1}{5}$.

Compléments sur les fonctions numériques

Dériver des fonctions

- $f(x) = \sqrt{1-x}$

  $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$
- $f(x) = (1-x)^3$

  $f'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$ sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = e^{x^2-3x+1}$

  $f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x+1}$ sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$

  $f'(x) = \dfrac{x.e^x - (e^x-1).1}{x^2} = \dfrac{x.e^x - x + 1}{x^2}$ sur $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

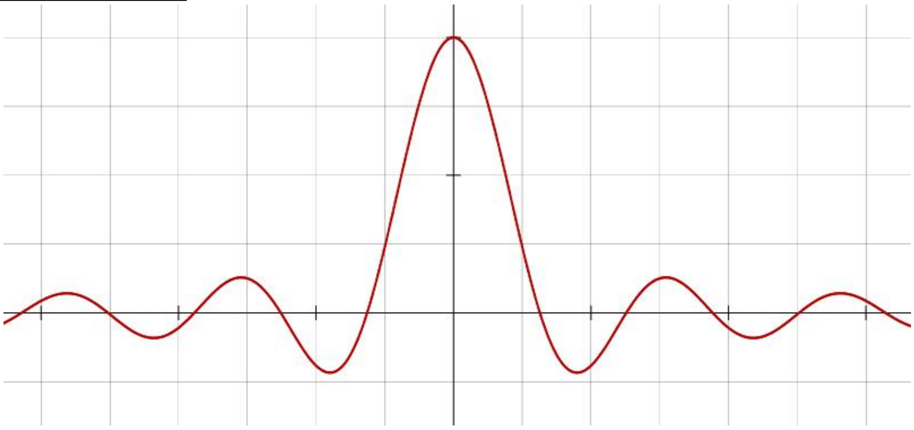
Connaître et utiliser les fonctions sinus et cosinus

$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

- domaine de définition : $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$
- limite aux bornes :
  * en 0 : résultat du cours : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
  * en $+\infty$: pour tout réel $x > 0$: $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$; par le théorème d'encadrement, on conclut que $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$
  * en $-\infty$: pour tout réel $x < 0$: $-\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{\sin x}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$; par le théorème d'encadrement, on conclut que $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$
- la fonction est continue sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$; on peut la « prolonger par continuité » en 0 en posant $f(0) = 1$
- $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin(x)}{-x} = \dfrac{\sin(x)}{x} = f(x)$: la fonction est paire (son étude peut se limiter à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et être complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, pour sa représentation graphique).
- recherche des valeurs d'annulation : $f(x) = 0 \iff \sin(x) = 0$ *et* $x \neq 0 \iff x = k.\pi$, avec k un entier relatif non nul.
- $f'(x) = \dfrac{x.\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$: cette dérivée est difficile à exploiter (il faudrait être en mesure de connaître son signe ; le signe du numérateur est délicat à étudier). [1]
- équation de la tangente en un point d'annulation : $y = f'(k.\pi)(x - k.\pi) + f(k.\pi)$ ce qui donne : $y = \dfrac{(-1)^k}{k.\pi}(x - k.\pi)$ (alternance d'un coefficient directeur positif et négatif, valeur qui tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini)

1. il faut pour cela résoudre l'équation $x = \tan(x)$, ce qui ne peut pas se faire algébriquement

– <u>représentation graphique</u> :



Limites et continuité

Déterminer la limite d'une fonction à l'infini

Déterminer les limites suivantes :

– $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}$

Par les théorèmes généraux, x^2+x+1 présente une forme indéterminée type « $+\infty-\infty$ » : on factorise le terme prépondérant :

$x^2+x+1 = x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) = x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$: par somme, le terme entre parenthèses converge vers 1 lorsque x tend vers $-\infty$; par produit, l'expression x^2+x+1 diverge vers $+\infty$.

Or, $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$: ainsi, par composition des limites, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$

– $\lim_{x\to+\infty} x+\sin(x)$

Comme la fonction $x \to \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut pas utiliser les théorèmes généraux.

Mais, comme pour tout réel x, $\sin(x) \geqslant 1$, on a : $x+\sin(x) \geqslant x$

Comme la fonction $x \to x$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, par le théorème de comparaison, on conclut que $\lim_{x\to+\infty} x+\sin(x) = +\infty$

– $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Par les théorèmes généraux, l'expression présente une forme indéterminée type « $+\infty - \infty$ ».

La méthode consistant à factoriser le terme prépondérant est inefficace ici : pour une expression contenant des racines carrées, on peut penser à utiliser l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Le dénominateur, par composition et par somme, diverge vers $+\infty$; ainsi, par quotient, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0$

Déterminer la limite infinie d'une fonction en un réel a

– $\lim_{x\to1^-} \dfrac{5-x}{1-x}$

Numérateur : quand $x \to 1^-$, $5-x \to 4 > 0$

Dénominateur : quand $x \to 1^-$, $1-x \to 0$ en étant positif.

Donc, par quotient, la limite est infinie ; le quotient étant positif, $\lim_{x\to1^-} \dfrac{5-x}{1-x} = +\infty$

- $\lim_{x \to 1} \dfrac{5-x}{(1-x)^2}$

  Numérateur : quand $x \to 1$, $5 - x \to 4 > 0$

  Dénominateur :
  * quand $x \to 1^-$, $(1-x)^2 \to 0$ en étant positif.
  * quand $x \to 1^+$, $(1-x)^2 \to 0$ en étant positif.

  Donc, par quotient, la limite est infinie ; le quotient étant positif, $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{5-x}{(1-x)^2} = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{5-x}{(1-x)^2} = +\infty$

  Dans ce cas, on peut considérer que $\lim_{x \to 1} \dfrac{5-x}{(1-x)^2} = +\infty$

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

  Numérateur : quand $x \to 0$, $e^x - 1 \to 0$

  Dénominateur : $x \to 0$

  On a donc une forme indéterminée, du type « $\frac{0}{0}$ »

  Seul un résultat du cours permet de lever cette indétermination (résultat à connaître) : $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 20$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On étudie le signe de ce polynôme du second degré : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 36 + 864 = 900$

Il a deux racines : $x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{900}}{12} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{900}}{12} = 2$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	61	$\searrow$	-64	$\nearrow$	$+\infty$

On complète avec les limites en $-\infty$ et en $+\infty$:

$\lim_{x \to -\infty} 2x^3 + 3x^2 - 36x - 20 = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{36}{x^2} - \frac{20}{x^3}\right) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} 2x^3 + 3x^2 - 36x - 20 = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{36}{x^2} - \frac{20}{x^3}\right) = +\infty$

D'après ce tableau de variation, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on conclut que :

- l'équation $f(x) = 1$ admet trois solutions : une dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ -3[$, une dans l'intervalle $]-3\ ;\ 2[$, et une dans l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$
- l'équation $f(x) = 100$ admet une seule solution, dans dans l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$

remarque : pour obtenir les solutions aux équations proposées, il faut des méthodes numériques (par dichotomie, par « balayage ») pour approcher les solutions.

Fonction exponentielle

Propriétés numériques de la fonction exponentielle

* $\dfrac{e^7}{e^5} = e^2$
* $\dfrac{e^7 - e^5}{e^5} = \dfrac{e^5(e^2-1)}{e^5} = e^2 - 1$
* $(e^4)^2.e^5 = e^8.e^5 = e^{13}$
* $e^{-13}.e^{10} = e^{-13+10} = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$

Propriétés de la fonction exponentielle

$\boxed{e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}}$

preuve : $e^{a-a} = e^{a+(-a)} = e^a.e^{-a}$ d'après la relation $e^{a+b} = e^a.e^b$

Or, $e^{a-a} = e^0 = 1$; on a donc : $e^a.e^{-a} = 1$; comme, pour tout nombre a, $e^a \neq 0$, on peut diviser par e^a la relation précédente pour obtenir que $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

$\boxed{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$

preuve : $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a.e^{-b}$ (en appliquant la relation $e^{a+b} = e^a.e^b$)

Or, $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$ donc $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a.e^{-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$\boxed{\left(e^a\right)^n = e^{na}}$

principe de la preuve : c'est une démonstration par récurrence pour n entier naturel ; si on veut le prouver pour n entier relatif, on utilise le résultat précédent avec $-n$ qui est alors positif.

Calculs de limites avec la fonction exponentielle

– $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x$: forme indéterminée par les théorèmes généraux.

$e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$; comme $\lim_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty$, par produit, $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x = +\infty$

– $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} - e^x}$: forme indéterminée par les théorèmes généraux.

$$\frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} - e^x} = \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{e^x}{e^{2x}}\right)}{e^{3x}\left(1 - \frac{e^x}{e^{3x}}\right)} = \frac{1}{e^x}\,\frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}}$$

D'une part, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ et d'autre part, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}} = 1$

Par produit, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} - e^x} = 0$

– $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$: forme indéterminée par les théorèmes généraux.

$\dfrac{e^{2x}}{x^2-1} = \dfrac{e^{2x}}{x^2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{(e^x)^2}{x^2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2 \dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$

Par croissances comparées (résultat du cours), $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Par composition de limites, $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2 = +\infty$

Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$

Par produit, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2-1} + \infty$

– $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-e^x}{e^x}$: forme indéterminée par les théorèmes généraux.

$\dfrac{e^{2x}-e^x}{e^x} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{e^x} = e^x - 1$

Et donc, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-e^x}{e^x} = +\infty$

Etude de fonctions définies à partir de la fonction exponentielle

$f(x) = e^{-3x^2+2x+3}$

1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (-6x+2)e^{-3x^2+2x+3}$

   Comme pour tout nombre x, $e^{-3x^2+2x+3} > 0$, le signe de la dérivée est donné par le signe de $-6x+2$

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\frac{1}{3})$	$\searrow$	0

2. en $-\infty$:

   Par somme, $\lim_{x\to-\infty} -3x^2+2x+3 = -\infty$; comme $\lim_{X\to-\infty} e^{-X} = 0$, par composition des limites, $\lim_{x\to-\infty} e^{-3x^2+2x+3} = 0$

   en $+\infty$:

   Par les théorèmes généraux, $\lim_{x\to-\infty} -3x^2+2x+3$ est une forme indéterminée.

   $-3x^2+2x+3 = x^2\Big(-3+\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\Big) = x^2\Big(-3+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\Big)$; par produit (du type « $+\infty \times (-3)$ »), on obtient $\lim_{x\to+\infty} -3x^2+2x+3 = -\infty$

   Comme $\lim_{X\to-\infty} e^{-X} = 0$, par composition des limites, $\lim_{x\to-\infty} e^{-3x^2+2x+3} = 0$

Résolution d'équations utilisant la fonction exponentielle

1. $10 - 3e^{-x} > 0 \iff 10 > 3e^{-x} \iff \dfrac{10}{3} > e^{-x}$

   En utilisant la fonction ln, croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on obtient $\ln\left(\dfrac{10}{3}\right) > -x \iff x > \ln\left(\dfrac{10}{3}\right)$

   Conclusion : $\mathcal{S} = \left]\dfrac{10}{3}\ ;\ +\infty\right[$

2. $1 - 0,3^n \geq 0,9 \iff -0.3^n \geq -0.1 \iff 0,3^n \leq 0,1$

   En utilisant la fonction ln, croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on obtient $\ln(0,3^n) \leqslant \ln(0,1) \iff n\ln(0,3) \leqslant \ln(0,1) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,3)}$ (le changement de sens dans la dernière inégalité est due au fait que $\ln(0,3) < 0$)

   Conclusion : $\mathcal{S} = \left[\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,3)}\ ;\ +\infty\right[$

Fonction logarithme népérien

Fonction logarithme népérien comme fonction réciproque de la fonction exponentielle

1. $e^x = 8 \iff x = \ln(8)$
2. $e^{x^2} = 8 \iff x^2 = \ln(8) \iff x = \sqrt{\ln(8)}$ *ou* $x = -\sqrt{\ln(8)}$
3. $ln(x) = ln(x+8) \iff x = x+8$ *et* $x > 0$ *et* $x+8 > 0 \iff 0 = 8$: pas de solution
4. $ln(x) = -4 \iff x = e^{-4}$
5. $ln(2x) = ln(x-1) \iff 2x = x-1$ *et* $2x > 0$ *et* $x-1 > 0 \iff x = -1$ *et* $x > 0$ *et* $x > 1$: pas de solution

---

Propriétés numériques de la fonction logarithme népérien

1. $ln\left(x^4\right) = 4\ln(x)$
2. $ln\left(\frac{e}{x}\right) = \ln(e) - \ln(x) = 1 - \ln(x)$
3. $ln\left(\frac{\sqrt{x}}{e}\right) = \ln\left(\sqrt{x}\right) - \ln(e) = \frac{1}{2}\ln(x) - 1$
4. $ln\left(e.x\right) \ln(e) + \ln(x) = 1 + \ln(x)$
5. $ln\left(\frac{e}{\sqrt{x}}\right) = \ln(e) - \ln\left(\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{1}{2}\ln(x)$

Calculs de limites avec la fonction logarithme népérien

1. $\lim_{x\to 0^+} ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{1}{x}\right)$

   $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$:

   par composition des limites, $\lim_{x\to 0^+} ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

2. $\lim_{x\to +\infty} ln\left(x^2 - 5x + 3\right)$

   $\lim_{x\to +\infty} x^2 - 5x + 3 = \lim_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = +\infty$ (par produit)

   Par composition des limites, $\lim_{x\to +\infty} ln\left(x^2 - 5x + 3\right) = +\infty$

3. $\lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x^2+5x-2}{2x^2-3}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x-2}{2x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Par composition des limites, $\lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x^2+5x-2}{2x^2-3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x+1}$

C'est une forme indéterminée par les théorèmes généraux. Il faut utiliser un résultat du cours (croissances comparées entres les fonctions $x \to \ln(x)$ et $x \to x$ pour conclure) :

$$\frac{ln(x)}{x+1} = \frac{\ln(x)}{x}\frac{x}{x+1}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$

Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$

Ainsi, par produit, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x+1} = 0$

5. $\lim_{x\to 0} x.ln(x)$

Les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure : il faut utiliser un résultat sur les croissances comparées exprimé en $+\infty$ pour répondre au problème ; pour ce faire, on pose $X = \dfrac{1}{x}$:

$\lim_{x\to 0} x.ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}.\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}.(-\ln(X)) = \lim_{X\to+\infty} -\dfrac{\ln(X)}{X} =$ 0 (résultat du cours : croissances comparées)

Etude de fonctions définies à partir de la fonction logarithme népérien

$f(x) = \ln(x^2+1)$.

1. domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$; en effet, pour tout nombre réel x, $x^2+1 > 0$ donc, on peut en prendre le logarithme népérien.

2. parité : $f(-x) = \ln((-x)^2+1) = \ln(x^2+1) = f(x)$: la fonction est paire (on peut faire l'étude sur $\mathbb{R}^+$ et compléter par symétrie)

3. limite aux bornes : $\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$; par composition des limites, comme $\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, on conclut que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   Par un raisonnement similaire, ou par parité, on obtient que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

4. sens de variation : la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

   $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$: le signe est donné par le numérateur (le dénominateur étant toujours strictement positif).

   Ainsi, f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

5. extremum : de ce qui précède, la fonction admet un minimum en 0 égal à 0 (en effet, $f(0) = \ln(1) = 0$)

6. équation de la tangente en 0 : $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$: l'équation est donc : $y = 0$

   L'axe des abscisses est tangent à la courbe représentative de f en 0.

Résolution d'équations utilisant la fonction logarithme népérien

1. $1 - (0,7)^n > 0,95 \iff -(0,7)^n > -0,05 \iff (0,7)^n < 0,05$

   La fonction $x \to \ln(x)$ étant croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, cela revient à :

   $\ln\Big((0,7)^n\Big) < \ln(0,05) \iff n\ln(0,7) < \ln(0,05) \iff n > \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)}$

   (le changement de sens de l'inégalité est dû au fait que $\ln(0,7) < 0$

   Conclusion : $\mathcal{S} = \left]\dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)}\ ;\ +\infty\right[$

2. $e^x = 8 \iff x = \ln(8)$

3. $e^{2x} + e^x - 1 = 0 \iff (e^x)^2 + e^x - 1 = 0$

   En posant $X = e^x$, on est amené à résoudre : $X^2 + X - 1 = 0$

   Cette équation du second degré a un discriminant égal à 5.

   Les racines sont $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

   Or, en posant $X = e^x$, $X > 0$ donc on ne retient que la solution positive : $X = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

   Au final, on obtient $e^x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \iff x = \ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Calcul intégral

Intégrale et aire sous la courbe

On peut interpréter l'aire de la zone grisée par un calcul intégral, comme la différence entre l'intégrale de f et de la fonction $x \to x+2$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$. (pour être rigoureux, il faut montrer que $f(x) \geqslant x+2$ sur cet intervalle)

Ainsi, $\mathcal{A}_{zone\ grise} = \displaystyle\int_{-2}^{2} e^{-x} + 2x + 1\, dx - \int_{-2}^{2} x + 2\, dx$

$\mathcal{A}_{zone\ grise} = \displaystyle\int_{-2}^{2} e^{-x} + 2x + 1 - x - 2\, dx = \int_{-2}^{2} e^{-x} + x - 1\, dx$

$\mathcal{A}_{zone\ grise} = [-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x]_{-2}^{2} = -e^{-2} + \frac{1}{2}2^2 - 2 - \Big(-e^{-(-2)} + \frac{1}{2}(-2)^2 - (-2)\Big)$

$\mathcal{A}_{zone\ grise} = -e^{-2} + e^2 + 2 - 2 - 2 - 2 = e^2 - e^{-2} - 4 \approx 3,25$ unités d'aire

---

Détermination de primitives de fonctions

1. $f(x) = x(x^2-3)^2$ (du type $u'u^n$) $F(x) = \dfrac{1}{6}(x^2+3)^3$

2. $g(x) = \dfrac{x}{3x^2-4}$ (du type $\dfrac{u'}{u}$) $G(x) = \dfrac{1}{6}\ln(3x^2-4)$

3. $h(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+6x-7)^3}$ (du type $\dfrac{u'}{u^n}$) $H(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x^2+6x-7)^2}$

4. $i(x) = e^{-3x}$ (du type $u'e^u$) $I(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-3x}$

5. $j(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x-5}}$ (du type $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$) $J(x) = 3\sqrt{2x-5}$

Propriétés de l'intégrale

1. $\int_5^4 t^2dt + \int_4^5 t^2dt = \int_0^0 t^2dt$ (relation de Chasles)

   Donc, $\int_5^4 t^2dt + \int_4^5 t^2dt = 0$ et donc $\int_5^4 t^2dt = -\int_4^5 t^2dt$

   Or, $\int_4^5 t^2dt = \left[\dfrac{1}{3}t^3\right]_4^5 = \dfrac{1}{3}(5^3-4^3) = \dfrac{1}{3}(125-64) = \dfrac{61}{3}$

   Au final, $\int_5^4 t^2dt = -\dfrac{61}{3}$

2. Par linéarité, $\int_0^5 t^2dt + \int_0^5 (1-t^2)dt = \int_0^5 t^2+1-t^2\ dt = \int_0^5 1\ dt = (5-0)\times 1 = 4$

3. Démontrer que si $f \geq g$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$

   Soit $h(x) = g(x) - f(x)$; comme $f \geq g$ sur $[a\ ;\ b]$, pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, $h(x) \geqslant 0$

   Or, d'après la propriété de positivité, on a : $\int_a^b h(t)\ dt \geqslant 0$

   Cela donne : $\int_a^b g(t)-f(t)\ dt \geqslant 0$; par linéarité, $\int_a^b g(t)-f(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt$

   Ainsi, comme $\int_a^b g(t)-f(t)\ dt \geqslant 0$, $\int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$

   Et donc $\int_a^b g(t)\ dt \geqslant \int_a^b f(t)\ dt$

Valeur moyenne d'une fonction

1. $f(x) = x^2$ sur $[0\ ;\ 1]$

$$\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 t^2\ dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1^3-0^3) = \frac{1}{3}$$

2. $f(x) = x^2$ sur $[-1\ ;\ 0]$

$$\mu = \frac{1}{0-(-1)}\int_{-1}^0 t^2\ dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}(0^3-(-1)^3) = \frac{1}{3}$$

3. $f(x) = x^2$ sur $[-1\ ;\ 1]$

$$\mu = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 t^2\ dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{6}(1^3-(-1)^3) = \frac{1}{3}$$

4. $f(x) = x^2$ sur $[4\ ;\ 5]$

$$\mu = \frac{1}{5-4}\int_4^5 t^2\ dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_4^5 = \frac{1}{3}(5^3-4^3) = \frac{1}{3}61 = \frac{61}{3}$$

5. $f(x) = x^2$ sur $[4\ ;\ 8]$

$$\mu = \frac{1}{8-4}\int_4^8 t^2\ dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_4^8 = \frac{1}{12}(8^3-4^3) = \frac{1}{12}(512-64) = \frac{448}{12} = \frac{112}{3}$$

Les nombres complexes

Forme algébrique d'un nombre complexe

$z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$

1. $z_3 = z_1 - z_2$

   $z_3 = 1 + 2i - (1 - i) = 1 + 2i - 1 + i = 3i$ (c'est un nombre complexe *imaginaire pur*)
2. $z_4 = z_1.z_2$

   $z_4 = (1 + 2i)(1 - i) = 1 - i + 2i \times 1 + 2i \times (-i) = 1 - i + 2i - 2i^2 = 1 + i + 2 = 3 + i$
3. $z_5 = \dfrac{z_1}{z_2}$

   $$z_5 = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{1+3i-2}{1+1} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$$

Résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

On cherche à résoudre l'équation $z^3 + 8 = 0$

1. Donner les valeurs des réels a et b tels que $z^3 + 8 = (z - 2)(z^2 + az + b)$

   On va procéder par **identification**, après avoir développé $(z + 2)(z^2 + az + b)$:

   $(z + 2)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz + 2z^2 + 2az + 2b = z^3 + (a + 2)z^2 + (b + 2a)z + 2b$

   Ainsi, $a + 2 = 0$, $b + 2a = 0$ et $2b = 8$; cela donne : $b = 4$ et $a = -2$

   On conclut alors que $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$
2. Résoudre l'équation $z^3 + 8 = 0$

   $z^3 + 8 = 0 \iff (z + 2)(z^2 - 2z + 4) = 0 \iff z + 2 = 0$ ou $z^2 - 2z + 4 = 0$

   On résout $z^2 - 2z + 4 = 0$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12$

   On a donc deux solutions complexes :

   $z_1 = \frac{-(-2)+i\sqrt{12}}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

   Au final, l'équation $z^3 + 8 = 0$ a trois solutions : -2, $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$

Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. donner la forme algébrique de $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

   $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\Big(\cos(\frac{\pi}{3} + i\ \sin(\frac{\pi}{3})\Big) = 3\Big(\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{3}{2} + i\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$

2. donner la forme exponentielle de $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et de $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

   $|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

   Pour l'argument (que l'on note provisoirement θ) : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$; comme $\sin\theta > 0$, on conclut que $\theta = arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$ et donc : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

   $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

   Pour l'argument (que l'on note provisoirement θ) : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$; comme $\sin\theta < 0$, on conclut que $\theta = arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$ et donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

   remarque : $z_2 = \overline{z_1}$; on peut alors conclure directement que $|z_2| = |z_1| = 2$ et que $arg(z_2) = -arg(z_1) = -\frac{\pi}{3}$

3. donner la forme exponentielle de $z = -5\Big(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\ \sin(\frac{\pi}{5})\Big)$

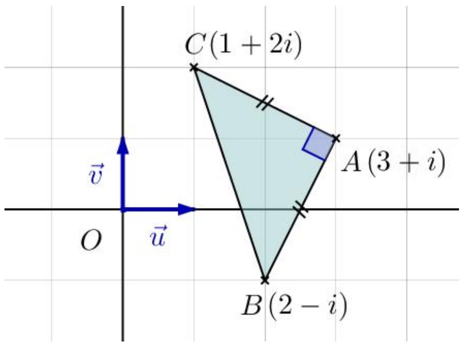
   $z = -5\Big(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\ \sin(\frac{\pi}{5})\Big) = 5\Big(\cos(-\frac{\pi}{5}) + i\ \sin(-\frac{\pi}{5})\Big) = 5e^{-i\frac{\pi}{5}}$

Interprétation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i,\ z_B = 2 - i \text{ et } z_C = 1 + 2i$$

Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.



On veut prouver que $AB = AC$; en terme de module, cela revient à $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$:

$|z_B - z_A| = |2 - i - 3 - i| = |-1-2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$|z_C - z_A| = |1 + 2i - 3 - i| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Ainsi, on a prouvé que $AB = AC$: le triangle est isocèle de sommet principal A.

On veut prouver que $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2}$

Pour cela, on va passer par les arguments de nombres complexes :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) &= (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC}\ ;\ \vec{u}) \\
&= (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AC}) \\
&= arg(z_B - z_A) - arg(z_C - z_A) \\
&= arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)
\end{aligned}$$

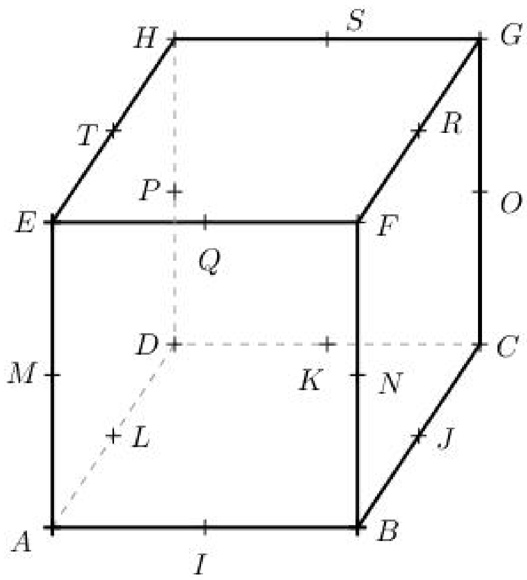
Or, $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{2 - i - 3 - i}{1 + 2i - 3 - i} = \dfrac{-1 - 2i}{-2 + i} = \dfrac{(-1 - 2i)(-2 - i)}{-2 + i)(-2 - i)} = \dfrac{2 + i + 4i + 2i^2}{5} = i$

Et donc : $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

Comme $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2}$, ABC est bien un triangle rectangle en A.

Droites et plans de l'espace - Vecteurs

Etude de la position relative de droite(s) et de plan(s)



- donner deux droites coplanaires (deux types à identifier)
  * **droites parallèles** : (AE) et (BF) ; (LK) et (IJ)
  * **droites sécantes** : (AC) et (BD) ; (AG) et (CE)
- donner deux droites **non sécantes et non parallèles** : (MP) et (OR)
- donner une droite et un plan parallèles (deux cas de figure)
  * **droite incluse dans un plan** : (LK) dans le plan (ABC)
  * **droite parallèle sans être incluse** : (LK) dans le plan (EFG)
- donner une droite et un plan sécants : (LS) et le plan (EFG)
- donner deux plans sécants : (EAC) et (FBD)
- donner deux plans parallèles : (TLK) et (EAC)

---

vecteurs de l'espace

Les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};1)$ sont-ils colinéaires ?

Pour passer des deux premières coordonnées de $\vec{u}$ à celles de $\vec{v}$, on multiplie par $-\frac{1}{3}$; mais il faut multiplier la dernière coordonnée par $\frac{1}{3}$: les coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$, $\vec{v}(2;-2;1)$ et $\vec{w}(7;2;11)$ sont-ils coplanaires ?

On cherche à établir une relation entre les trois vecteurs du type $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$, ce qui se traduit en terme de coordonnées par le système :

$$\begin{cases} a+2b+7c=0 \\ 2a-2b+2c=0 \\ 3a+b+11c=0 \end{cases}$$

En ajoutant les deux premières lignes, on obtient : $3a + 9c = 0$ soit $a = -3c$

En multipliant la première ligne par 2, et en lui soustrayant la seconde, on obtient : $6b + 12c = 0$ soit $b = -2c$

En remplaçant a par $-3c$ et b par $-2c$ dans la troisième ligne, on obtient $-11c + 11c = 0$, ce qui montre que le système admet une infinité de solutions du type $(-3c\ ;\ -2c\ ;\ c)$; on peut choisir par exemple $c = 1$ et donc : $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$.

Au final, la relation $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$, ce qui montre que **les vecteurs sont coplanaires**.

Formules dans un repère de l'espace

- Formules
  * $\overrightarrow{AB}$; $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$
  * Coordonnées de M, milieu de $[AB]$: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
  * Coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC :
  $$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\ ;\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\ ;\ \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

  Dans un repère **orthonormé**, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Si $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a, le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormé.

  On considère la diagonale $[AG]$; on donne facilement les coordonnées des points A et G dans ce repère : $A(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $G(a\ ;\ a\ ;\ a)$

  En appliquant la formule donnant la longueur d'un segment, on obtient :

  $AG = \sqrt{(a-0)^2 + (a-0)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

Représentation paramétrique d'une droite, d'un plan

Donner l'équation de la droite passant par $A(0; 2; -1)$ et dirigée par $\vec{u}(1; -2; 3)$

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

Or, $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \\ z - (-1) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \\ z + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,t \\ -2\,t \\ 3\,t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \quad t \\ y = 2 - 2\,t \\ z = -1 + 3\,t \end{cases}$

Dire si le point $B(1; 2; 5)$ appartient à cette droite ou pas.

Pour la première coordonnée : $t = 1$; si on remplace t par 1 dans la seconde coordonnée, on obtient $y = 2 - 2t = 2 - 2 \times 1 = 0$; or, la seconde coordonnée de B est 2 ; cela montre que le point B n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

Produit scalaire de l'espace

Calculs de produits scalaires

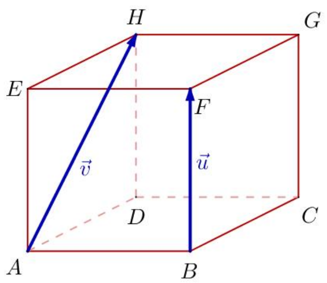
* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH} = AE \times AH \times \cos\left(\widehat{EAH}\right) = a \times a \times \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BF} \cdot \left(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}\right) = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FG} = a^2 + 0 = a^2$

* On se place dans le repère orthonormé $\left(A \ ; \ \overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{AD} \ ; \ \overrightarrow{AE}\right)$:

  $\vec{u}$ a pour coordonnées $(0 \ ; \ 0 \ ; \ a)$ et $\vec{v}$ $(0 \ ; \ a \ ; \ a)$.

  Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \times 0 + 0 \times a + a \times a = a^2$



Équations cartésienne d'un plan

* $\overrightarrow{AB}(-1 \ ; \ -1 \ ; \ -1)$ et $\overrightarrow{AC}(1 \ ; \ -1 \ ; \ -3)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc **les trois points A, B et C définissent bien un plan**.

* il faut tout d'abord déterminer les coordonnées d'**un vecteur normal au plan** (ABC) ; pour ce faire, on va traduire que ce vecteur (que l'on note $\vec{n}(a \ ; \ b \ ; \ c)$) est normal à la fois de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff -a - b - c = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff a - b - 3c = 0$

En ajoutant ces deux relations, on trouve : $-2b - 4c = 0$ ce qui donne $b = -2c$

En soustrayant ces deux relations, on trouve : $2a - 2c = 0$ ce qui donne $a = c$

En prenant $c = 1$, on trouve le vecteur normal suivant : $\boxed{\vec{n}(1 \ ; \ -2 \ ; \ 1)}$

$M(x \ ; \ y \ ; \ z) \in \mathcal{P}_{ABC} \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthonormaux $\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\iff (x-1).1 + (y-2).(-2) + (z-3).1 = 0 \iff x - 2y + z = 2$

L'équation cartésienne est $\boxed{x - 2y + z = 2}$

Intersection de droites et de plan

1. D'après l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan.

   D'après l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$, le vecteur $\vec{d}(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ est un vecteur directeur de la droite.

   Or, $\vec{n}\ .\ \vec{d} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 1 \times 0 = 0$: ces deux vecteurs sont orthogonaux, ce qui signifie que la droite et le plan sont parallèles.

   Par ailleurs, le point $A(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ appartient à la droite : en remplaçant ses coordonnées dans l'équation du plan, cela donne : $0 - 2 \times 1 + 2 = 0 \neq 2$; cela signifie que la droite n'est pas incluse dans le plan.

   An conclusion, **la droite est strictement parallèle au plan**.

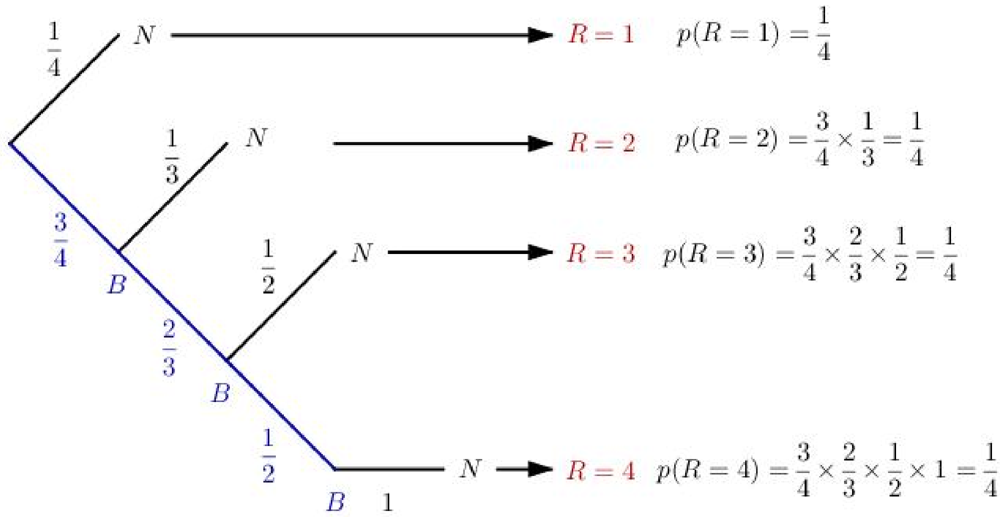
2. On remplace les coordonnées d'un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartenant à la droite $\mathcal{D}$ dans l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ pour déterminer la valeur du paramètre t correspondant au point d'intersection de la droite et du plan.

   Cela donne :
   $2t - 2(1-t) + (2+2t) = 2 \iff 2t - 2 - 2t + 2 + 2t = 2 \iff 2t = 2 \iff t = 1$

   En remplaçant la valeur de t par 1 dans l'équation paramétrique de la droite, on obtient les coordonnées du point d'intersection : $\boxed{M(2\ ;\ 2\ ;\ 4)}$

Probabilités conditionnelles

Modéliser une situation (par un arbre par exemple)



D'où la loi de probabilité :

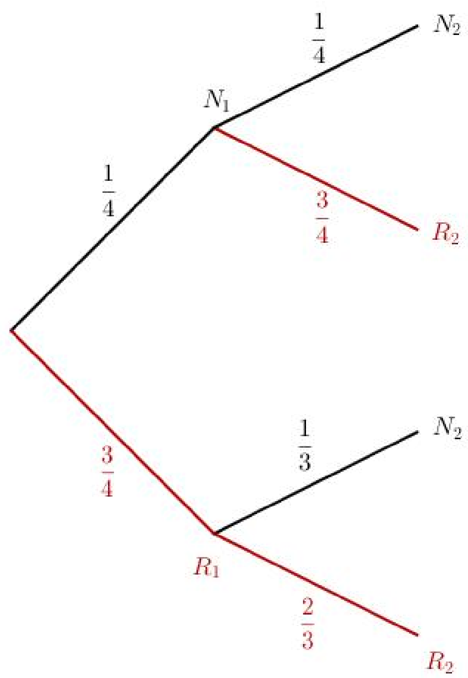
a_i	1	2	3	4
$P(R=a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

La variable aléatoire R suit une loi uniforme.

Pour aller plus loin : s'il y a remise, l'arbre est « infini » ; il faut compléter le raisonnement pour aboutir à des résultats complets.

Utiliser la formule des probabilités totales

On peut illustrer la situation par l'arbre suivant :



On a noté :

- R_1 l'événement : « obtenir une boule rouge au premier tirage » ;
- R_2 l'événement : « obtenir une boule rouge au second tirage » ;
- N_1 l'événement : « obtenir une boule noire au premier tirage » ;
- N_2 l'événement : « obtenir une boule noire au second tirage ».

On cherche à calculer $P(R_2)$; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R_2) = p(N_1 \cap R_2) + P(N_2 \cap R_2)$$

Cela donne :

$$P(R_2) = p(N_1) \times P_{N_1}(R_2) + P(N_2) \times P_{N_2}(R_2)$$

Numériquement : $P(R_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{11}{16}$

Indépendance de deux évènements

1. Le lancer de deux dés : le numéro sorti sur un dé est indépendant de celui sorti sur l'autre dé.
2. pour les entiers de 1 à 100 :

   $P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{1}{5}$

   $P(A \cap B) = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$ (il y a 10 nombres entiers entre 1 et 100 qui sont multiples à la fois de 2 et de 5).

   On constate que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$: les événements A et B sont indépendants.

   pour les entiers de 1 à 101 :

   $P(A) = \dfrac{50}{101}$ et $P(B) = \dfrac{20}{101}$

   $P(A \cap B) = \dfrac{10}{101}$

   Ainsi, $P(A) \times P(B) = \dfrac{50}{101} \times \dfrac{20}{101} = \dfrac{1\,000}{101^2}$: on constate que $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$: les événements A et B ne sont pas indépendants.

Lois de probabilité continues

Définition d'une loi à densité

1. La fonction f est continue et positive sur $[1\ ;\ 8]$; pour que ce soit une loi à densité, il faut que $\int_1^8 f(t)\,dt = 1$.

   Cela donne :

   $$\int_1^8 k.t^2\,dt = 1 \iff k.[\tfrac{1}{3}t^3]_1^8 = 1 \iff k\frac{8^3-1^3}{3} = 1 \iff k\frac{1023}{3} = 1 \iff k = \frac{3}{1024}$$

2. Sur cet intervalle, la f est continue et positive. Reste à montrer qu'il existe une valeur de k telle que $\int_1^{+\infty} \frac{k}{t^2}\,dt = 1$

   Pour faire ce calcul, on évalue $\int_1^X \frac{k}{t^2}\,dt$ et on fera tendre X vers $+\infty$:

   $$\int_1^X \tfrac{k}{t^2}\,dt = k.\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^X = k\Big(-\frac{1}{X}-(-1)\Big) = k\Big(1-\frac{1}{X}\Big)$$

   En faisant tendre X vers $+\infty$, on a donc : $\int_1^X \frac{k}{t^2}\,dt = 1$

   Ainsi, en prenant $k=1$, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est une loi à densité sur $[1\ ;\ +\infty[$.

3. Sur cet intervalle, la f est continue et positive. Reste à montrer qu'il existe une valeur de k telle que $\int_1^{+\infty} \frac{k}{t}\,dt = 1$

   Pour faire ce calcul, on évalue $\int_1^X \frac{k}{t}\,dt$ et on fera tendre X vers $+\infty$:

   $$\int_1^X \tfrac{k}{t}\,dt = k.\Big[\ln(t)\Big]_1^X = k\Big(\ln(X)-\ln(1)\Big) = k\Big(\ln(X)\Big)$$

   En faisant tendre X vers $+\infty$, on a donc une intégrale qui tend vers $+\infty$: il n'est pas possible de trouver une valeur de k pour laquelle la fonction soit une loi à densité.

Utiliser la loi uniforme

1. C'est une loi uniforme sur un intervalle de longueur 0,5 : la densité est la fonction constante $f(x) = 2$ sur l'intervalle $[16\ ;\ 16,5]$.

2. On intègre une fonction constante égale à 2 sur un intervalle de longueur $\frac{1}{6}$ (10 minutes représentent un sixième d'heure) : cela revient à calculer l'aire d'un rectangle de $\frac{1}{6}$ sur 2 ; cela donne $\dfrac{1}{3}$.

3. Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle :

   $$P_{(h>16h15)}(16h20 < h < 16h30) = \frac{P(16h20 < h < 16h30)}{P(h > 16h15)} = \frac{P(h > 16h20)}{P(h > 16h15)}$$

   Numériquement : $p = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{3}$

4. Il s'agit de calculer l'espérance mathématique d'un loi uniforme (ou de faire fonctionner son « bon sens ») : l'espérance est la moyenne des extrémités des bornes de l'intervalle de la loi uniforme, 16 h et 16 h 30 ici, ce qui donne 16 h 15.

Utiliser la loi exponentielle

- $P(X<4)=\displaystyle\int_0^4 \lambda e^{-\lambda t}\,dt=\Big[-e^{-\lambda t}\Big]_0^4=-e^{-4\lambda}-\big(-1\big)=1-e^{-4\lambda}$

  On est amené à résoudre l'équation : $1-e^{-4\lambda}=0,3$

  Elle est équivalente à : $e^{-4\lambda}=0,7 \iff -4\lambda=\ln(0,7) \iff \lambda=\dfrac{\ln(0,7)}{-4}$

  Conclusion : $\boxed{\lambda=-\dfrac{\ln(0,7)}{4}}$ (cette valeur est bien positive)
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(Y)=\dfrac{1}{\lambda}$ donc $\lambda=\dfrac{1}{7}$
- Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ,

  $P(X>h)=1-P(X<h)=1-\displaystyle\int_0^h \lambda e^{-\lambda t}\,dt=1-\Big[-e^{-\lambda t}\Big]_0^h$

  Ainsi, $P(X>h)=1-\big(-e^{-\lambda h}-(-1)\big)=1+e^{-\lambda h}-1=e^{-\lambda h}$

  Montrer que la loi est sans vieillissement signifie montrer la relation :

  $$P_{(X>t)}(X>t+h)=P(X>h)$$

  On exprime donc $P_{(X>t)}(X>t+h)$:

  $P_{(X>t)}(X>t+h)=\dfrac{P\big((X>t+h)\ \cap\ (X>t)\big)}{P(X>t)}=\dfrac{P(X>t+h)}{P(X>t)}=\dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$

  On utilise les propriétés de la fonction exponentielle : $\dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=\dfrac{e^{-\lambda t}.e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda h}$

  Or, $e^{-\lambda h}=P(X>h)$: la relation est bien vérifiée.

Loi normale centrée réduite : calculs

1. $P(X<2)\approx 0,977$
2. $P(1<X<2)\approx 0,14$
3. $P(X>1)\approx 0,16$
4. le réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(X<k)=0,9$; $k\approx 1,28$
5. le réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(-k<X<k)=0,95$; cela revient à chercher le réel k tel que $P(X<k)=0,975$: $k\approx 1,96$

Loi normale centrée réduite : valeurs remarquables

1. $P(-1<X<1)\approx 0,68$

2. Donner la valeur du réel k (à 10^{-2} près) tel que $P(-k < X < k) = 0,95$: $k \approx 1,96$
3. $P(-3 < X < 3) \approx 0,997$

Loi normale à paramètres

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(10\ ;\ 25)$.

1. $P(5 < X < 15) \approx 0,682$; c'est $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
2. $P(X < 15) \approx 0,841$
3. $P(5 < X) \approx 0,159$
4. $P(X < 15) - P(5 < X) \approx 0,841 - 0,159 \approx 0,682$
   Ceci est cohérent car $P(X < 15) - P(5 < X) = P(5 < X < 15)$

Échantillonnage et estimation

Centrer et réduire une loi binomiale

$E(X) = np = 200 \times 0,12 = 24$

$V(X) = np(1-p) = 200 \times 0,12 \times 0,88 = 21,12$

Ainsi, la variable aléatoire $\boxed{Z = \dfrac{X-24}{\sqrt{21,12}}}$ a une espérance égale à 0 (elle est centrée) et une variance égale à 1 (elle est réduite).

Déterminer et utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique

On s'attend à ce qu'il y ait $12\% \times 50 = 6$ gauchers parmi les 50 joueurs en question. On va utiliser un intervalle de fluctuation pour savoir si cette différence est due au hasard, ou s'il y a à chercher une autre explication.
On est dans les conditions d'application de l'intervalle de fluctuation asymptotique, puisque : $n = 50 > 30$, $np = 50 \times 0,12 = 6 > 5$ et $n(1-p) = 50 \times 0,88 = 44 > 5$

Cela donne : $I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \ ; \ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \approx [0,03 \ ; \ 0,21]$
Cet intervalle (donné en fréquence) donne en effectif : $[1,5 \ ; \ 10,5]$

Ainsi, avec 8 gauchers parmi 50 joueurs, on ne peut pas dire qu'il y ait une raison spéciale qui justifierait une enquête pour expliquer qu'il y a plus de gauchers parmi les 50 meilleurs joueurs mondiaux que dans la population globale : on peut penser que cela est juste dû au hasard.

Déterminer et utiliser un intervalle de confiance

On est dans les conditions d'application du calcul d'un intervalle de confiance par la formule : $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ puisque $nf = 510 > 5$, $n(1-f) = 190 > 5$ et $n > 30$.

Cet intervalle donne numériquement : $I = [0,478 \ ; \ 0,542]$: il est donc possible que moins de 50 % des électeurs votent pour le candidat A donc il n'est pas sûr d'être élu.

Pour qu'on soit sûr qu'il soit élu, il faut que la borne inférieure de l'intervalle de confiance soit supérieure à 50 %, ce qui donne :
$f - \frac{1}{\sqrt{n}} > 0,5 \iff 0,51 - \frac{1}{\sqrt{n}} > 0,5 \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,01 \iff \sqrt{n} > 100 \iff n > 10\ 000$
Si on interroge 10 000 personnes, et que le résultat de ce sondage donne le candidat A vainqueur à 51 %, on peut être sûr (à 95 %) qu'il gagnera.

Remarque : dans la pratique, on interroge de l'ordre de 1 000 personnes ; interroger beaucoup plus de personnes revient trop cher.
