exercice de synthèse : ex 72 p 351

1. **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{6}u_n - \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{6}\left(v_n + \dfrac{2}{5}\right) - \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{6}v_n$

Cela montre que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique, de raison } \dfrac{1}{6}}$

b. Pour déterminer v_n, on doit connaître son premier terme : $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}$

On a donc,pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\boxed{v_n = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{6^{n-1}}}$

On en déduit : $\boxed{u_n = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{6^{n-1}}}$

2. **a.** a_1 est la probabilité d'utiliser le dé A au premier lancer ; cette probabilité vaut $\dfrac{1}{2}$: $\boxed{a_1 = \dfrac{1}{2}}$

b. D'après la formule des probabilités totales : $P(R_1) = P(A_1 \cap R_1) + P(\overline{A_1} \cap R_1)$

Cela donne : $r_1 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{6} = \dfrac{7}{12}$ $\boxed{r_1 = \dfrac{7}{12}}$

c. $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$ est une relation sur les événements ; cela donne en terme de probabilités :

$r_n = P(R_n \cap A_n) + P(R_n \cap \overline{A_n})$; on fait évoluer ces écritures en utilisant les probabilités conditionnelles :

$r_n = P(A_n) \times P_{A_n}(R_n) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(R_n)$

D'où : $r_n = a_n \times \dfrac{1}{2} + (1 - a_n) \times \dfrac{2}{3}$

En faisant évoluer cette écriture, on obtient : $\boxed{r_n = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}}$

d. $A_{n+1} = (R_n \cap A_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$

Comment obtenir le dé A au $n+1^{\text{ème}}$ lancer ? Deux cas de figure :
- on avait un dé A au lancer précédent (le $n^{\text{ième}}$) et on est tombé sur une face rouge ;
- on avait un dé B au lancer précédent et on est tombé sur une face blanche.

Écrire cette situation en notations mathématiques donne : $\boxed{A_{n+1} = (R_n \cap A_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})}$

Cette relation ne fait finalement que traduire la « règle du jeu ».

e. En passant aux probabilités dans la relation précédente, on obtient :

$P(A_{n+1}) = P(R_n \cap A_n) + P(\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$ (car les événements sont incompatibles)

D'où : $a_{n+1} = P(A_n) \times P_{A_n}(R_n) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(\overline{R_n}) = a_n \times \dfrac{1}{2} + (1 - a_n) \times \dfrac{1}{3}$

En faisant évoluer cette écriture, on obtient : $\boxed{a_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{3}}$

On constate que la suite (a_n) vérifie :
- le premier terme a_1 est égal à $\dfrac{1}{2}$;

– la relation de récurrence suivante : $a_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{3}$.

La suite (a_n) est donc la suite décrite dans la partie 1 de l'exercice, et donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\boxed{a_n = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{6^{n-1}}}$

f. ainsi, $r_n = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{6^{n-1}}\right) + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{10}\dfrac{1}{6^n} + \dfrac{3}{5}$; on a bien : $\boxed{r_n - \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{6^n} + \dfrac{3}{5}}$

Comme $-1 < \dfrac{1}{6} < 1$, on sait que $\lim \dfrac{1}{6^n} = 0$, et on conclut donc que : $\boxed{\lim r_n = \dfrac{3}{5}}$

Cela signifie qu'après « un grand nombre d'étapes », la probabilité d'avoir une face rouge à un lancer sera proche de $\dfrac{3}{5}$.