durée : 4 heures **calculatrice autorisée**

Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : /4 points

Question à choix multiple : à faire sur les feuilles réservées **en pensant à bien colorer la case choisie** (en noir si possible)

***Exercice* 2** : /1 point

Commun à tous les élèves

Restitution organisée de connaissances

Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ (où $\overline{B}$ désigne l'événement contraire de l'événement B) sont également indépendants.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

Comme A et B sont indépendants, cela donne : $P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap \overline{B})$

Cela équivaut à : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$

Cette dernière égalité montre que les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

***Exercice* 3** : /3 points

Commun à tous les élèves

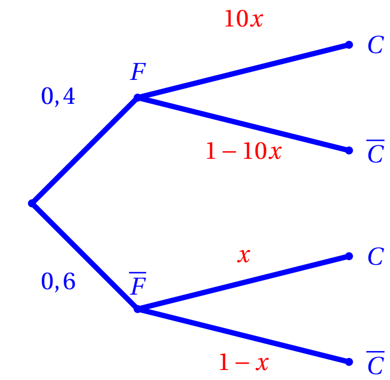
En étudiant les statistiques sur plusieurs années, on peut considérer que la probabilité de contracter un cancer du poumon est égale à $3,5 \cdot 10^{-4}$ (35 cas pour 100 000 personnes). Le tabagisme a une influence importante sur cette maladie. On considère qu'un fumeur régulier multiplie par 10 le risque de contracter un cancer du poumon.

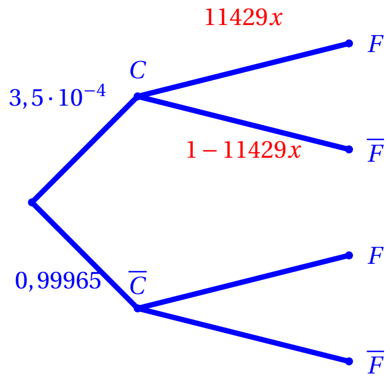
Par ailleurs, on peut estimer à 0,4 la proportion de fumeurs dans la population.

On va chercher dans ce problème à calculer la probabilité qu'une personne soit un fumeur régulier, sachant que cette personne a contracté le cancer du poumon.

Dans l'exercice, on notera :
- F l'événement « être fumeur » ;
- C l'événement « avoir contracté le cancer du poumon ».

1. Construire deux arbres pondérés traduisant la situation de la consigne.





2. On notera x la probabilité de contracter le cancer du poumon sachant que la personne est **non fumeur**.

Comme il est dit que le risque de contracter le cancer du poumon est multiplié par 10 lorsqu'une personne est fumeur, on va considérer que la probabilité de contracter le cancer du poumon sachant que la personne est fumeur est égal à $10x$.

Compléter lorsque c'est possible les branches des arbres par des expressions qui dépendent de x.

3. Exprimer $P_C(F)$ en fonction de x.

$$P_C(F) = \frac{P(C \cap F)}{P(C)} = \frac{4x}{3,5 \cdot 10^{-4}} \approx 11429x$$

4. En exprimant de deux manières différentes $P(\overline{F} \cap C)$, établir une équation d'inconnue x, puis la résoudre.

$P(\overline{F} \cap C) = 3,5 \cdot 10^{-4} - 4x = 0,6x$

Ce qui donne : $4,6x = 3,5 \cdot 10^{-4}$ et donc $x \approx 7,6 \cdot 10^{-5}$

5. A quoi est égale la probabilité $P_C(F)$?

$P_C(F) \approx 11428x \approx 0,87$

6. Les événements C et F sont-ils indépendants ?

$P_C(F) \neq P(F)$: ces deux événements ne sont pas indépendants (au sens mathématique du terme, ce qui est bien cohérent avec la réalité)

Exercice **4** : /7 points

Commun à tous les élèves

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. **a.** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n.

On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1\,000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.
D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 20 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.
Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100$ avec $u_0 = 1\,000$.

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30\,000$.
À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28\,103$ et $u_{23} \approx 33\,624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u < 30\,000$ faire
	    u prend la valeur $1,2 \times u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n \geqslant 1\,000$.

- $u_0 = 1\,000 \geqslant 1\,000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- On suppose la propriété vraie pour un rang quelconque $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p \geqslant 1\,000$.
$u_{p+1} = 1,2\,u_p - 100$; $u_p \geqslant 1\,000$ donc $1,2\,u_p \geqslant 1\,200$ donc $1,2\,u_p - 100 \geqslant 1\,100$.
Donc $1,2\,u_p - 100 \geqslant 1\,000$ et on a démontré que la propriété était vraie au rang $p+1$.

- La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pour tout n, $u_n \geqslant 1\,000$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1,2\,u_n - 100 - u_n = 0,2\,u_n - 100$
Or, pour tout n, $u_n \geqslant 1\,000$ donc $0,2\,u_n \geqslant 200$ et donc $0,2\,u_n - 100 \geqslant 100$
On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.
On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2\,u_n - 100 - 500 = 1,2(v_n + 500) - 600 = 1,2\,v_n + 600 - 600 = 1,2\,v_n$
$v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = 500$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$.
Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1,2^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif; or $1,2 > 1$ donc, d'après le cours, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Pour tout n, $u_n = v_n + 500$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49e^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. **a.** Calculer $f(0)$.

$$f(0) = \frac{50}{1 + 49e^{0}} = \frac{50}{1 + 49} = 1$$

b. Démontrer que, pour tout réel $t > 0$, $f(t) < 50$.

Pour tout t, $e^{-0,2t} > 0$ donc $1 + 49e^{-0,2t} > 1$ et donc $\dfrac{1}{1 + 49e^{-0,2t}} < 1$

On en déduit que $\dfrac{50}{1 + 49e^{-0,2t}} < 50$ et donc que, pour tout t, $f(t) < 50$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction f.

La fonction $t \longmapsto -0,2t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto e^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction $t \longmapsto 1 + 49e^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction inverse est décroissante sur $]0~;~+\infty[$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + 49e^{-0,2t}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
On en conclut que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0~;~+\infty[$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.

- $f(0) = 1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t = 0$ est de 1 kg ;
- $f(t) < 50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg ;
- f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Par la méthode de votre choix (graphique et numérique), résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

Graphiquement, ou numériquement (à l'aide de la calculatrice en tout cas), on trouve : $f(t) > 30$ pour $t > 21,5$

On en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.
L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.
L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?

On peut appliquer la formule donnant un intervalle de fluctuation : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ car $p = 0,8$ (on est à la limite) et n est suffisamment grand.

Cela donne numériquement un intervalle égal à $[0,729 ; 0,871]$

Or, l'échantillon contient une fréquence de protéines A égale à $\frac{146}{200} = 0,73$: on est juste à la limite de l'intervalle de fluctuation (peu importe qu'on considère en faire partie ou pas) ce qui permet de, légitimement, remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

***Exercice* 5** : /2 points

À faire par les élèves ne suivant pas la spécialité Maths

Ceci est un article du magazine *Sport et Vie* (n°159 - Novembre-Décembre 2016 - p 62)

Éthiopie Le marathon en moins de deux

La plupart des coureurs dilettantes seraient heureux de boucler la mythique distance de 42,195 km du marathon en moins de quatre heures. Pour ceux qui s'entraînent sérieusement, l'objectif sera plus souvent de descendre sous trois heures. Enfin, ils sont une poignée d'athlètes dans le monde qui rêvent de terminer la course en moins de deux heures. C'est notamment le cas de Kenenisa Bekele. Récemment, il a fait venir en Éthiopie une équipe de médecins et de kinés de l'université de Glasgow pour le débarrasser de blessures *récurrentes au mollet. Dans le même but, il a consulté le sulfureux médecin bavarois allemand Hans-Wilhem Müller-Wohlfart, le grand gourou du sang de veau, et prit conseil auprès de spécialistes comme Yanis Pitsiladis (université de Brighton), l'auteur du projet « sub 2 » qui fixe précisément le cadre théorique d'un tel exploit. Le 25 septembre, Bekele remportait le marathon de Berlin en 2h03mn03sec après avoir longtemps flirté avec le record du monde de Dennis Kimetto établi sur le même parcours deux plus tôt (2h02mn57sec). À l'arrivée, il a néanmoins surpris tout le monde en confiant qu'il n'était pas encore totalement remis de ses blessures et qu'il s'estimait à 80 % de ses possibilités. On l'a pris au mot pour calculer son chrono théorique au maximum de sa forme : 1 heure et 38 minutes. Qui dit mieux ?*

Question : le calcul des journalistes de *Sport et Vie* à la fin de l'article est-il correct ?

toute trace de recherche pertinente sera valorisée

Première méthode : par un calcul de vitesse

$v = \dfrac{distance}{temps} = \dfrac{42\,195}{7\,383} \approx 5,72$ m/s (on a converti les 2h03'03" en 7 383 secondes)

Cette vitesse correspond à 80 % de la vitesse maximum ; la vitesse maximum est alors égale à :
$100 \cdot 5,71 \div 80 \approx 7,14$ m/s

Pour établir ce calcul, on peut par exemple s'aider du tableau suivant :

marathon	niveau	vitesse
Berlin	80	5,72
« sub 2 »	100	

À cette vitesse, les 42,195 km seront parcouru en : $\dfrac{42\,195}{7,14} \approx 5906,4$ s ce qui donne 1h38mn26sec : **le calcul est bien exact**.

Seconde méthode : par un calcul direct

Certains peuvent sentir que le temps sera, lorsque le coureur sera à 100 % de ses possibilités, égal à 80 % du temps fait au marathon de Berlin (pour ma part, je ne trouve pas que cela soit évident ... et sans calculs, je ne saurais pas l'expliquer) ; cela donne (en exprimant le temps en secondes) :

$t = 0,8 \times 7\,383 = 5\,906,4$ sec ce qui fera bien les 1h38mn26sec trouvés précédemment.

Exercice **6** : /3 points

À faire par les élèves ne suivant pas la spécialité Maths

1. Développer l'expression : $(z-(1+i))\cdot(z-(1-i))$

   $(z-(1+i))\cdot(z-(1-i)) = z^2-(1+i+1-i)z+(1+i)(1-i) = z^2-2z+2$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+2=0$

   On utilise le résultat de la question 1 : $z^2-2z+2=0 \Longleftrightarrow (z-(1+i))\cdot(z-(1-i))=0$

   Et donc : $\mathscr{S}=\{1+i\,;\,1-i\}$

3. Développer et réduire l'expression $(z^2-2z+2)(z-1)$

   $(z^2-2z+2)(z-1) = z^3-z^2-2z^2+2z+2z-2 = z^3-3z^2+4z-2$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3-3z^2+4z-2=0$

   $z^3-3z^2+4z-2=0 \Longleftrightarrow (z^2-2z+2)(z-1)=0$

   Et donc : $\mathscr{S}=\{1+i\,;\,1-i;1\}$

Exercice **7** : /5 points

À faire par les élèves suivant la spécialité Maths

Les deux parties sont totalement indépendantes.

Partie A : arithmétique

Bob étudie la suite (u_n) définie pour $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=2^n+3^n$.
Il pense que le chiffre des unités de u_n est 5 si et seulement si n et impair.
Cet exercice vise à démontrer sa conjecture.

1. Calculer les 6 premiers termes de la suite, et vérifier que la conjecture de Bob est vraie sur ceux-ci.
2. Étudier la congruence de u_n modulo 2, et conclure sur la parité de u_n.
3. On nomme r le reste dans la division euclidienne de n par 5.
   a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\equiv 2^r+3^r$ modulo 4.
   b. Lister, pour les valeurs possibles de r, les congruences de u_n modulo 5.
4. On admet sans le justifier que n est impair si et seulement si r l'est aussi.
   Déduire des questions 2 et 3 que la conjecture de Bob sur le chiffre des unités de u_n est vraie (on pourra penser au critère de divisibilité par 5).

Partie B : matrices

On étudie dans cet exercice la matrice $\mathrm{R}=\begin{pmatrix}\cos(a) & \sin(a)\\ -\sin(a) & \cos(a)\end{pmatrix}$, où a et un nombre réel.

1. Dans cette question, $a=\pi$, de sorte que $\mathrm{R}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.
   a. Détailler les matrices R^2 , R^3 puis R^4 .
   (Il n'est pas demandé de détailler les calculs : les résultats suffisent).

b. Émettre une conjecture sur l'expression littérale de R^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(Il n'est pas demandé de prouver cette conjecture, simplement de donner une réponse du type $R^n = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ en détaillant l'expression des coefficients)

2. Dans cette question, a est un nombre réel quelconque.
On pourra utiliser le formulaire à la fin de l'exercice.

a. Montrer, en détaillant par étapes le produit matriciel, que $R^2 = \begin{pmatrix} \cos(2a) & \sin(2a) \\ -\sin(2a) & \cos(2a) \end{pmatrix}$

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n = \begin{pmatrix} \cos(na) & \sin(na) \\ -\sin(na) & \cos(na) \end{pmatrix}$

Formulaire

Pour tous réels a et b :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

TS 2016 DS1 - Eléments de correction

Partie A

1) $u_0 = 2$, $u_1 = 2+3 = 5$, $u_2 = 13$, $u_3 = 35$, $u_4 = 97$, $u_5 = 275$.
La conjecture de Bob se vérifie jusque $n = 5$.

2) Pour $n = 0$, $u_0 = 2$; il est donc pair.

Pour $n \neq 0$, $u_n \equiv 2^n + 3^n \equiv 0^n + 1^n \equiv 1 \bmod 2$, donc u_n est impair.

3a) On a $n = 4q + r$ où $0 \leqslant r < 4$.
Or $2^4 = 16 \equiv 1 \bmod 5$ et $3^4 = 81 \equiv 1 \bmod 5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_n \equiv 2^{4q+r} + 3^{4q+R} \equiv (2^4)^q \times 2^r + (3^4)^q \times 3^r \equiv 1 \times 2^r + 1 \times 3^r \equiv 2^r + 3^r \bmod 5$.

b)

r	Congruence de u_n mod 5
0	$2^0 + 3^0 \equiv 2$
1	$2^1 + 3^1 \equiv 5 \equiv 0$
2	$2^2 + 3^2 \equiv 13 \equiv 3$
3	$2^3 + 3^3 \equiv 35 \equiv 0$

4) De 3), on déduit, par disjonction des cas sur r, que $u_n \equiv 0 \bmod 5$ si et seulement si r est impair, c'est à dire si et seulement si n est impair.
Or, $u_n \equiv 0 \bmod 5$ lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.
D'après le 2), u_n est impair, donc le chiffre des unités ne peut pas être 0.
Ceci démontre la conjecture de Bob.

Partie B

1a) $R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $R^3 = R^2 \times R = I_2 \times R = R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $R^4 = I_2$

b) On peut penser que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

2a)

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(a)\times\cos(a) - \sin(a)\times\sin(a) & \sin(a)\times\cos(a) + \cos(a)\times\sin(a) \\ -\cos(a)\times\sin(a) - \sin(a)\times\cos(a) & -\sin(a)\times\sin(a) + \cos(a)\times\cos(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2a) & \sin(2a) \\ -\sin(2a) & \cos(2a) \end{pmatrix}$$

b) Initialisation : immédiate pour $n = 1$.

Hérédité : pour un n donné, on suppose que $\mathrm{R}^n = \begin{pmatrix} \cos(na) & \sin(na) \\ -\sin(na) & \cos(a) \end{pmatrix}$

$\mathrm{R}^{n+1} = \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}$. On détaille le produit matriciel ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \cos(na) & \sin(na) \\ -\sin(na) & \cos(na) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(a)\times\cos(na) - \sin(a)\times\sin(na) & \sin(a)\times\cos(na) + \cos(a)\times\sin(na) \\ -\cos(a)\times\sin(na) - \sin(a)\times\cos(na) & -\sin(a)\times\sin(na) + \cos(a)\times\cos(na) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(na+a) & \sin(na+a) \\ -\sin(na+a) & \cos(na+a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos((n+1)a) & \sin((n+1)a) \\ -\sin((n+1)a) & \cos((n+1)a) \end{pmatrix}$$