Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

Une personne a entendu dire que la probabilité de gagner à un jeu (jeu à gratter au bureau de tabac) est égale à $\frac{1}{10}$. On supposera que le fait de gagner à un grattage est indépendant des autres grattages. Cette personne se dit qu'il va donc jouer 10 fois et qu'il sera sûr de gagner quelque chose.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

On répète 10 fois la même expérience (gratter une carte) de manière indépendante (les cartes n'ont pas de rapport les unes avec les autres), la probabilité de succès de chaque partie est de $\frac{1}{10}$; X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{10}$.

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

On cherche : $P(X \geqslant 1)$; on peut passer par l'évènement contraire :
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(X = 0)$ se calcule directement (par la calculatrice) ; on obtient : $P(X \geqslant 1) \approx 1 - 0{,}35 \approx 0,65$

c. Déterminer l'espérance de X.

$E(X) = 10 \times \frac{1}{10} = 1$

d. Conclure quant au fait qu'il « soit sûr » de gagner au moins une partie.

Il peut légitimement penser gagner au moins une partie : la probabilité que cela arrive est égale à 0,65 ; c'est tout de même un peu faible pour dire qu'on en est sûr !

2. Le joueur a développé une addiction forte aux jeux. Il joue 100 cartes à gratter.

a. A votre avis, combien de parties va-t-il gagner ?

Si on note Y la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{10}$.

Le joueur peut « espérer » gagner $E(Y) = 100 \times \frac{1}{10} = 10$ fois.

b. Quelle est la probabilité de gagner exactement 10 fois ? Au vu du résultat, allez-vous parier qu'il va gagner 10 fois ?

La probabilité de gagner exactement 10 fois est égale à 0,13 ; on ne peut pas, du fait de cette valeur, affirmer qu'il va gagner 10 fois. Cette probabilité paraît trop faible. C'est pourtant la probabilité la plus élevée. C'est le fait d'avoir de nombreuses issues (101 au total) qui fait que la probabilité de réalisation de telle ou telle issue est faible. Il faut raisonner en intervalle pour avoir des probabilités qui commencent à devenir conséquentes : probabilité d'avoir entre 8 et 12 parties gagnées par exemple.

c. Il a gagné 14 parties et est donc convaincu qu'il est dans un jour de chance exceptionnel; qu'en pensez-vous?

Pour vous aider à argumenter votre réponse, on vous donne ci-dessous un extrait de la loi de probabilité d'une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{10}$, ainsi que les probabilités cumulées ($P(X \leqslant k)$). On pourra déterminer à l'aide de ce tableau l'intervalle de fluctuation à 95 % du nombre de parties gagnées par le joueur, lorsqu'il fait 100 parties avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ de gagner à chaque partie.

On s'attend à gagner 10 fois : si on gagne 9 fois, ou 11 fois, cela paraîtra normal, la différence étant due au hasard; de même pour 8 ou 12 parties gagnées; à partir de quand peut-on considérer que les résultats sortent de la normale? C'est là qu'intervient l'intervalle de fluctuation : il regroupe à lui seul une probabilité au moins égale à 95 % (on parle dans ce cas d'intervalle de fluctuation à 95 %) ; cela signifie que l'on rejette 5 % des valeurs. On le fait de manière symétrique par rapport à la probabilité la plus grande, c'est-à-dire qu'on rejette les « 2,5 % du début » ainsi que les « 2,5 % de la fin ».

Pour le faire de manière efficace, on regarde **les probabilités cumulées** : dès qu'on dépasse 2,5 % et 97,5 % (qui est la somme de 2,5 % et 95 %), on note les valeurs de X qui correspondent : on a alors les bornes de l'intervalle de fluctuation à 95 %.

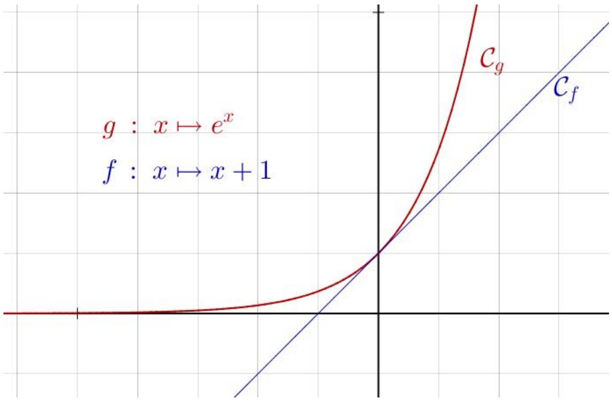
En lisant le tableau ci-dessous, on constate que l'intervalle de fluctuation à 95 % est [5 ; 16] ; 14 se trouvant dans cet intervalle, on ne peut pas dire que l'on soit dans une situation exceptionnelle. Le joueur a eu de la chance certes, mais pas de manière « anormalement » marquée.

k	P(X=k)	P(X<=k)
0	2,6561E-05	2,6561E-05
1	0,00029513	0,00032169
2	0,0016232	0,00194488
3	0,0058916	0,00783649
4	0,0158746	0,02371108
5	0,0338658	0,05757689
6	0,05957873	0,11715562
7	0,08889525	0,20605086
8	0,11482303	0,32087389
9	0,13041628	0,45129017
10	0,13186535	0,58315551
11	0,11987759	0,7030331
12	0,09878801	0,80182111
13	0,07430209	0,87612321
14	0,05130383	0,92742703
15	0,03268244	0,96010947
16	0,01929172	0,97940119
17	0,01059153	0,98999272
18	0,00542653	0,99541925
19	0,00260219	0,99802144
20	0,00117099	0,99919243
21	0,00049566	0,99968808
22	0,00019776	0,99988584
23	7,4519E-05	0,99996036
24	2,6565E-05	0,99998693
...	...	...
99	9E-98	1
100	1E-100	1

***Exercice* 2** :

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout nombre réel x, $e^x \geqslant x+1$ (une relation de ce type sera utilisée pour démontrer que la fonction exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$)

1. Conjecturer ce résultat par une approche graphique (décrivez votre démarche et vos observations).



$\mathscr{C}_g$, courbe représentative de la fonction exponentielle semble toujours être au dessus de $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x+1$. Cela signifie que pour tout nombre x, on semble avoir $e^x \geqslant x+1$.

2. On introduit la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par : $d(x) = e^x - x - 1$

a. étudier la fonction d sur $\mathbb{R}$, en particulier le fait qu'elle atteint un minimum.

$d(x) = e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $d'(x) = e^x - 1$. On est capable de donner le signe de cette expression (en sachant que la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, continue et qu'elle est égale à 1 en 0) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe $e^x - 1$	$-$		$+$
variations de d	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction admet donc un minimum en 0 ; ce minimum est égal à 0.

b. Grâce à l'étude précédente, démontrer le résultat attendu.

On a donc, pour tout nombre x, $f(x) = e^x - x - 1 \geqslant 0$, ce qui est équivalent à $e^x \geqslant x+1$