Proposition de corrigé :

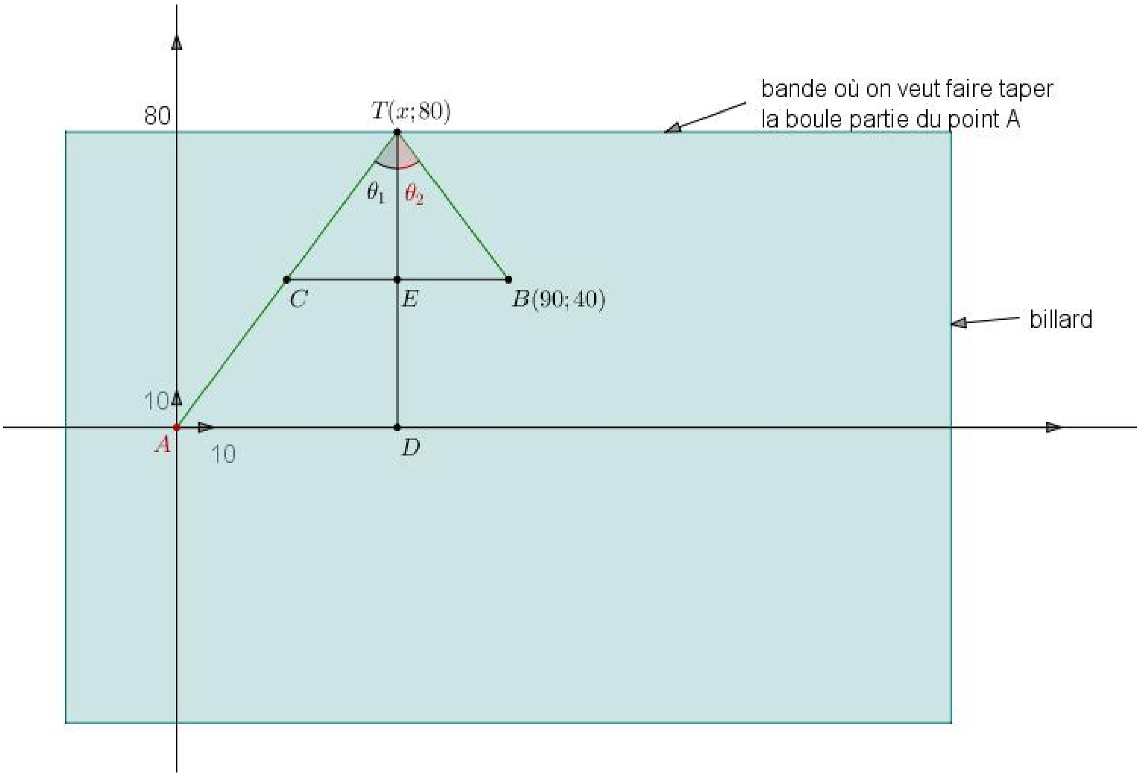
***Exercice* 1** :

Ce DM est un travail de recherche ; plusieurs méthodes permettent de résoudre le problème ; des hypothèses doivent être formulées pour avancer dans ce problème. On attend à la fois une recherche et une explication argumentée mathématiquement (voire par de la physique).

On cherche à savoir où une boule de billard doit taper la bande pour aller toucher une autre boule (principe du billard français) ; on supposera que la boule dans laquelle on tape ne touchera qu'une bande et on négligera tout effet.

On peut utiliser un logiciel de géométrie dynamique, afficher la longueur $AT + TB$ et **conjecturer** la position du point T ; cela donnera de bonnes indications pour la démonstration qui suivra.

Première approche : à l'aide d'angles



On peut utiliser ce qu'on appelle l'angle d'incidence, noté sur la figure θ_1, ainsi que l'angle réfléchi, noté θ_2 ; si on néglige tout effet de la boule sur la bande du billard, on a : $\theta_2 = \theta_1$.

Les triangles ATD et TEB ont les mêmes angles (90°, $\theta_1 = \theta_2$ et le complémentaire de cet angle).

Ils ont donc des longueurs de côtés proportionnelles (on dit qu'ils sont **semblables**) ; ou alors, on peut utiliser le théorème de Thalès dans le triangle TAD, les triangles TCE et TEB ayant les mêmes longueurs (on dit qu'ils sont **isométriques**).

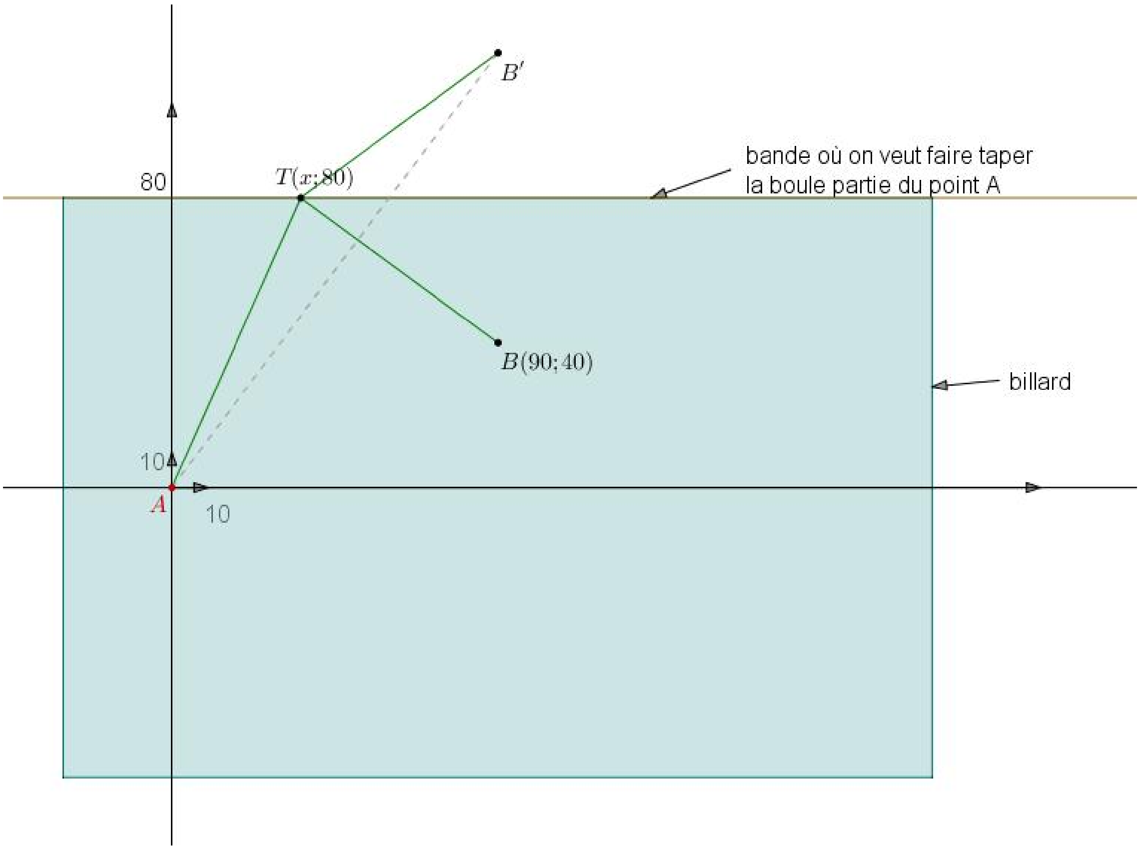
Ainsi, $\dfrac{EB}{AD} = \dfrac{TE}{TD}$

Cette relation donne dans la situation présentée : $\dfrac{90-x}{x} = \dfrac{80-40}{80}$ ce qui donne $\dfrac{90-x}{x} = \dfrac{1}{2}$

On fait évoluer : $180 - 2x = x$ et donc $x = \dfrac{180}{3} = 60$

Le point T a pour coordonnées (60 ; 80).

Deuxième approche : principe de minimum de distance



On peut (par des arguments de physique) justifier que la trajectoire de la boule de billard est celle qui minimise la distance $AT + TB$.

On cherche donc à minimiser cette distance.

Une méthode astucieuse consiste à construire le point B', symétrique de B par rapport à la bande du billard.

Par les propriétés de la symétrie axiale, $TB = TB'$; ainsi, minimiser $AT + TB$ revient à minimiser $AT + TB'$; or, c'est très facile de minimiser cette longueur : il est nécessaire et suffisant que les points A, T et B' soient alignés.

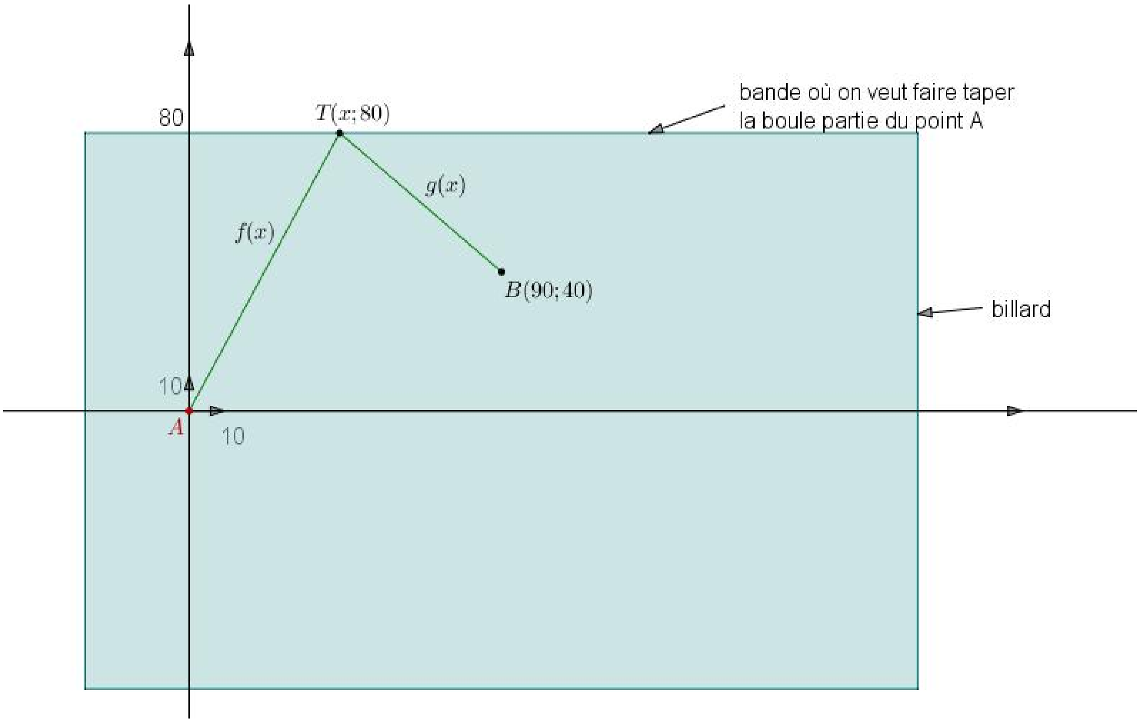
Reste à déterminer la position du point T pour que ces points soient alignés.
B' a pour coordonnées (90 ; 80+40) c'est-à-dire (90 ; 120).

La droite (AB') a pour équation : $y = \dfrac{120}{90}x$ soit $y = \dfrac{4}{3}x$

L'intersection de cette droite et de la bande de billard (le point T) vérifie $y = \dfrac{4}{3}x$ et $y = 80$ ce qui donne :

$\dfrac{4}{3}x = 80$ soit $x = \dfrac{3}{4} \times 80 = 3 \times 20 = 60$

Le point T a pour coordonnées (60 ; 80).



Si on ne pense pas à placer le symétrique du point B par rapport à la bande du billard (ce qui est « légitime »), on aurait pu penser à utiliser les fonctions pour minimiser la distance $AT + TB$:

On note x l'abscisse du point T, et on va exprimer la distance $AT + TB$ *en fonction* de x, en créant la fonction $d(x)$: $d(x) = AT + TB$.

$AT = \sqrt{(x-0)^2 + (80-0)^2} = \sqrt{x^2 + 6400}$

$TB = \sqrt{(90-x)^2 + (40-80)^2} = \sqrt{8100 - 180x + x^2 + 1600} = \sqrt{9700 - 180x + x^2}$

On note f la première fonction, et g la seconde ; il s'agit de minimiser $f + g$; pour cela, on est amené à dériver ; pour éviter les erreurs, on peut dériver séparément f et g :

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 6400}}$

$g'(x) = \dfrac{-180 + 2x}{2\sqrt{9700 - 180x + x^2}} = \dfrac{x - 90}{\sqrt{9700 - 180x + x^2}}$

En toute rigueur, il faudrait démontrer que la fonction $d(x) = f(x) + g(x)$ est bien définie pour $x \in [0;+\infty[$, dérivable sur $]0;+\infty[$.

Il faudrait étudier le signe de la dérivée, montrer que la fonction est tout d'abord décroissante, puis croissante, bref, qu'elle admet un minimum lorsque la dérivée s'annule. Considérons que des arguments « de physicien » justifient tout cela, et cherchons la savoir où cette dérivée s'annule :

il faut résoudre la sympathique relation : $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 6400}} + \dfrac{x - 90}{\sqrt{9700 - 180x + x^2}} = 0$ qui revient à :

$x\sqrt{9700 - 180x + x^2} = (x - 90)\sqrt{x^2 + 6400}$; on raisonne par condition nécessaire, en élevant au carré :

$x^2(9700 - 180x + x^2) = (x - 90)^2(x^2 + 6400)$ et on a confiance dans notre technique en calcul littéral :

$x^4 - 180x^3 + 9700x^2 = (x^2 - 180x + 8100)(x^2 + 6400)$

$x^4 - 180x^3 + 9700x^2 = x^4 + 6400x^2 - 180x^3 - 1152000x + 8100x^2 + 54840000$

Heureusement, ça s'arrange un peu :

$9700x^2 = 14500x^2 - 1152000x + 54840000$ et donc : $4800x^2 - 1152000x + 54840000 = 0$

Comme par hasard, on peut simplifier par 4800 :

$\boxed{x^2 - 240x + 10800 = 0}$

le discriminant donne : $\Delta = 240^2 - 4 \times 10800 = 14400 = 120^2$

Il y a deux racines : 60 et 180.

Nous avons raisonné par condition « nécessaire » ; reste à vérifier que ces solutions annulent effectivement $d'(x)$.

Là, vous me faites confiance, 60 annule $d'(x)$ mais pas 180.

Au final, le point T a pour coordonnées $(60\,;\,80)$.

remarques :

1. selon la méthode choisie, la complexité est plus ou moins importante ! Tout ça pour aboutir au même résultat . . .
2. cette histoire de boule de billard relève d'un principe important de la physique : on peut démontrer qu'il y a équivalence entre le fait que l'angle d'incidence est égal à l'angle réfléchi et le fait d'avoir un chemin minimal. Ce phénomène s'applique à la **lumière**.
3. on peut démontrer qu'il y a équivalence entre le fait d'avoir un chemin minimal est celui d'avoir un angle d'incidence égal à l'angle réfléchi.