***Exercice* 1** :

Elle a invité un copain pour réviser le Bac. Ses parents ont toute confiance en elle mais voudraient bien savoir comment se passent les révisions.

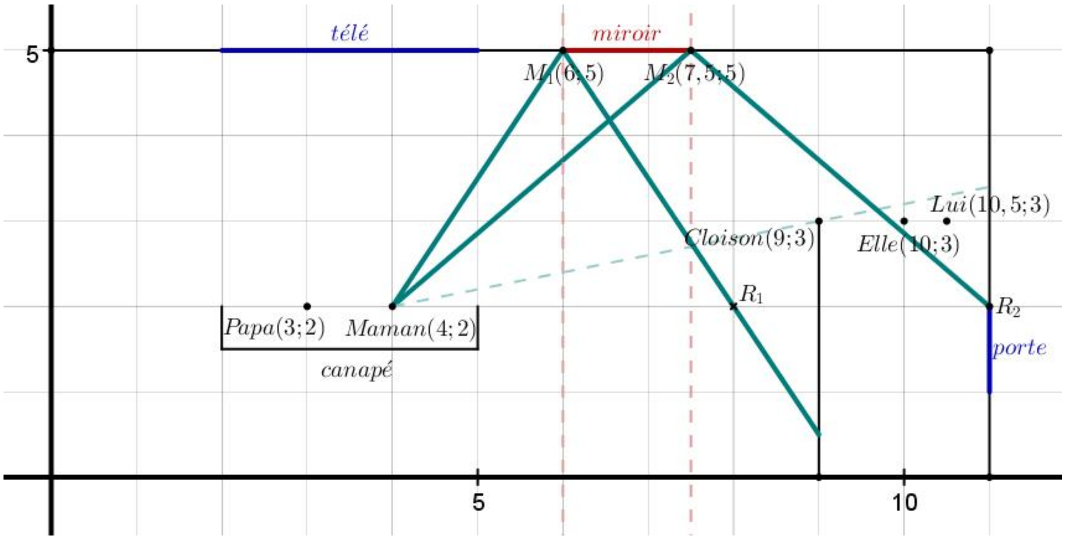
C'est pourquoi, au moment de partir, ils voudraient bien avoir un oeil sur *elle* et *lui* pour voir la façon dont ils vont se saluer ....

Maman et *Papa* sont sur le canapé, soit disant en train de regarder la télé ... mais l'air de rien, leurs regards se portent vers ce qui se passe du côté de l'entrée, séparée du salon par une cloison. *Elle* sait qu'un miroir est judicieusement placé pour que la porte soit visible depuis le canapé ; seront-ils vus par *Maman* ou *Papa* là où ils se trouvent ?

Pour que tout le monde ait exactement la même situation, nous l'avons placée dans un repère. Les coordonnées des points clés du problème sont données. On attend de votre part une réponse argumentée ; un schéma est attendu, avec des rayons **fléchés** représentant le parcours de la lumière. Ce schéma ne constitue cependant pas une réponse en lui-même. Il devra être complété par des calculs plus précis.

On désignera par M la position de *Maman* et par P celle de *Papa*.

le champ de vision de ***Maman***



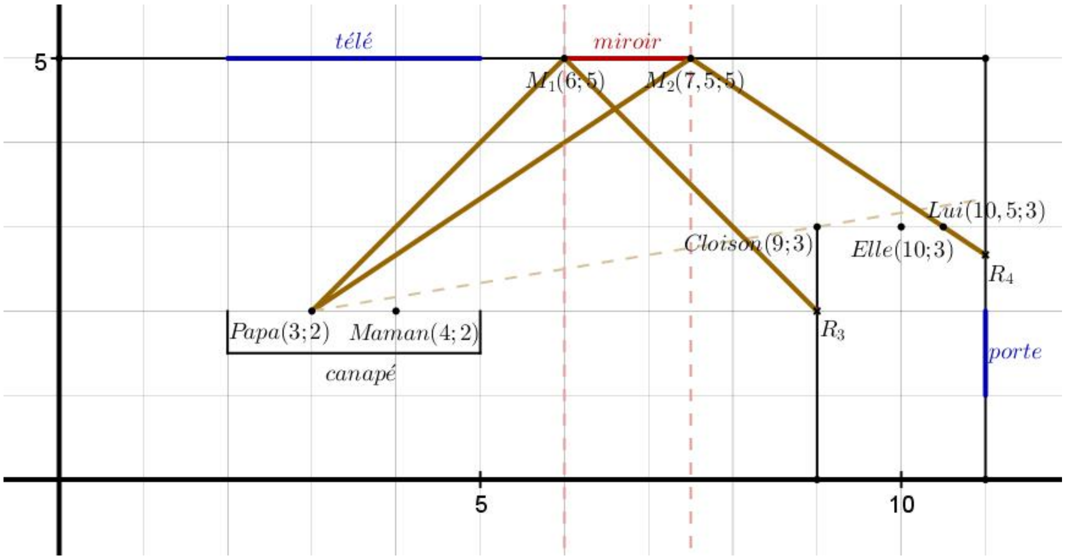
Il faut déterminer l'équation des rayons réfléchis $[M_1R_1]$ et $[M_2R_2]$; le premier passe par exemple par le point R_1 de coordonnées $(8 ; 2)$ et le second par le point R_2 de coordonnées $(11 ; 2)$.

Pour le premier, c'est $y = -1,5x + 14$ (droite (M_1R_1))
Pour être plus précis, ce qui sera vu depuis le miroir vérifiera $y \geqslant -1,5x + 14$

Pour le second, c'est $y = -\frac{6}{7}x + \frac{80}{7}$ (droite (M_2R_2))
Pour être plus précis, ce qui sera vu depuis le miroir vérifiera $y \leqslant -\frac{6}{7}x + \frac{80}{7}$

Cherchons si le point E et L vérifie ces conditions : pour E $(10 ; 3)$: $3 \geqslant -1,5 \times 10 + 14 = -1$; la première condition est vérifiée (graphiquement, le point E est au-dessus de la droite).

$3 > -\frac{6}{7} \times 10 + \frac{80}{7} = \frac{20}{7}$: la seconde condition n'est pas vérifiée (de justesse !) ; le point E n'est pas dans le champ de vision de *Maman* le champ de vision de ***Papa***



Il faut déterminer l'équation des rayons réfléchis $[M_1R_3]$ et $[M_2R_4]$; le premier passe par exemple par le point R_3 de coordonnées (9 ; 2) et le second par le point R_4 de coordonnées (11 ; 2,5).

Pour le premier, c'est $y = -x+11$ (droite (M_1R_3))
Pour être plus précis, ce qui sera vu depuis le miroir vérifiera $y \geqslant -x+11$

Pour le second, c'est $y = -\dfrac{2}{3}x+10$ (droite (M_2R_4))
Pour être plus précis, ce qui sera vu depuis le miroir vérifiera $y \leqslant -\dfrac{2}{3}x+10$

Cherchons si le point E vérifie ces conditions : pour E (10 ; 3) : $3 \geqslant -10+11 = 1$; la première condition est vérifiée (graphiquement, le point E est au-dessus de la droite).

$3 < -\dfrac{2}{3}\times 10+10 = \dfrac{10}{3}$: la seconde condition est vérifiée ; le point E est dans le champ de vision de *Papa*

Cherchons si le point L vérifie ces conditions : pour L (10,5 ; 3) : $3 \geqslant -10,5+11 = 0,5$; la première condition est vérifiée (graphiquement, le point L est au-dessus de la droite).

$-\dfrac{2}{3}\times 10,5+10 = -7+10 = 3$: la seconde condition est vérifiée ... à la limite ; le point L est pas dans le champ de vision de *Papa*, à la limite !

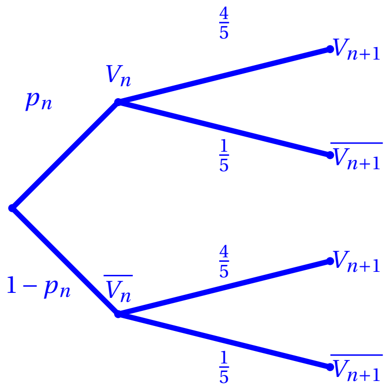
On ne sait pas trop ce que *Papa* verra ... il aura sans doute envie de se déplacer légèrement sur sa gauche.

***Exercice* 2** :

Dans un pays imaginaire, la probabilité qu'un habitant transmette fidèlement une information reçue est de $\frac{4}{5}$, celle qu'il dise exactement le contraire est de $\frac{1}{5}$.

Un jour, une certaine information, vraie à l'origine, se répand de bouche à oreille parmi les habitants de ce pays. On désigne par V_n l'évènement « l'information transmise par la n^{ieme} personne est vraie » et on note p_n la probabilité de V_n.

1. **a.** Illustrer la transmission de l'information au stade des n^{ieme} et $n+1^{ième}$ personnes, par un arbre de probabilités , tel que celui ci-dessous à compléter.



b. Justifier que $p_1 = \frac{4}{5}$ et montrer que $p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

p_1 est la probabilité que la première transmission soit vraie. L'information au départ étant vraie, on a une probabilité de $\frac{4}{5}$ qu'elle soit vraie à l'issue de la première transmission ; on a bien $p_1 = \frac{4}{5}$.

En utilisant l'arbre précédent, grâce à la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P(V_{n+1}) = P(V_{n+1} \cap V_n) + P(V_{n+1} \cap \overline{V_n})$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} P(V_{n+1}) &= P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1}) + P(\overline{V_n}) \times P_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \\ p_{n+1} &= p_n \times \frac{4}{5} + (1-p_n) \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5}p_n - \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{5}(u_n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{5}u_n + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} - \frac{5}{10} \\ &= \frac{3}{5}u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

b. En déduire l'expression de (p_n) en fonction de n.

Le premier terme de la suite (u_n) est $u_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8-5}{10} = \frac{3}{10}$

On a donc : $u_n = \frac{3}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}$

On trouve alors : $p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} + \frac{1}{2}$

c. Calculer $\lim p_n$ et interpréter.

Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, on sait que la suite $\left(\frac{3}{5}\right)^{n}$ tend vers 0.

On a donc $\lim p_n = \frac{1}{2}$

On peut dire qu'après de nombreuses transmissions, la probabilité que l'information soit vraie est proche de $\frac{1}{2}$.