# Chapitre 13

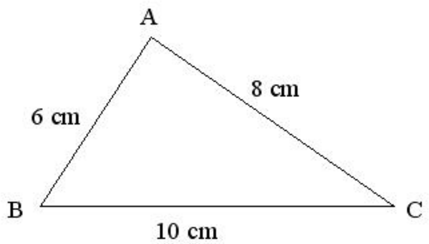
# Triangles rectangles. Trigonométrie

## I reconnaître un triangle rectangle

### I - 1) par la réciproque du théorème de Pythagore

*Activité* : le triangle $ABC$ est-il rectangle ?

Remarquons que s'il est rectangle, le plus grand côté étant $[BC]$, il ne peut l'être qu'en $A$.




Il s'agit ici de bien rédiger la réciproque du théorème :

– d'une part, $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

– d'autre part, $BC^2 = 10^2 = 100$.

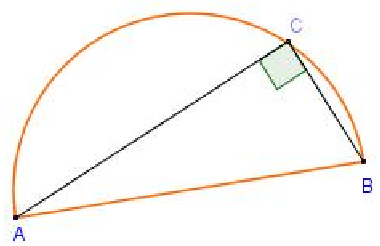
On **constate** que : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

D'après la **réciproque** du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

### I - 2) dans un demi cercle

**Si** on sait qu'un triangle est **inscrit dans un demi-cercle**, c'est-à-dire :
- un des côtés du triangle est un diamètre d'un cercle,
- le troisième sommet est sur le cercle,

**alors** ce triangle est rectangle.




*remarque* : ce résultat se démontre grâce au théorème de l'angle inscrit / angle au centre (voir le chapitre 14).

## I - 3) par calcul d'angles

**Si** dans un triangle $ABC$, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont complémentaires,

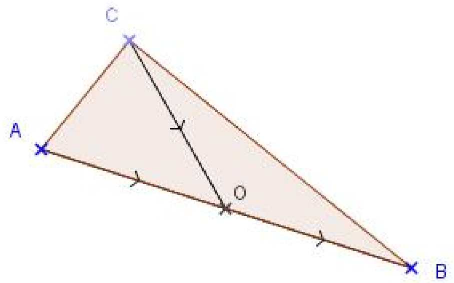
**alors** ce triangle est rectangle en $A$.

*preuve :*
- *les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont complémentaires veut dire que $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 90°$;*
- *or, la somme des angles dans un triangle est égale à 180°;*
- *ainsi : $\widehat{BAC} = 180 - 90 = 90°$ : le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.*

## I - 4) par la longueur d'une médiane

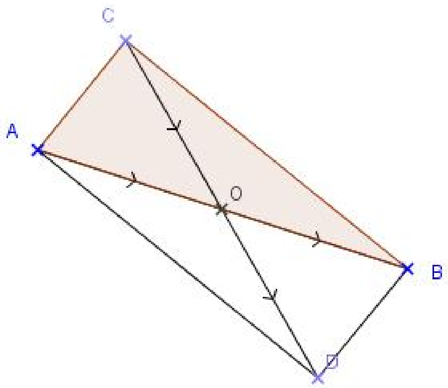
**Si** dans un triangle, la longueur d'une médiane est égale à la moitié de la longueur du côté qu'elle coupe,

**alors** ce triangle est rectangle.




ce schéma, par son codage, traduit les données de la propriété

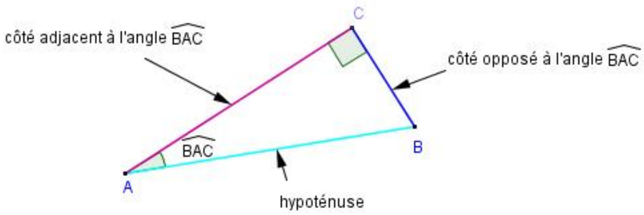
*preuve* :
- on construit le point $D$, symétrique du point $C$ par rapport à $O$;
- on peut donc compléter le codage de la figure précédente de cette manière :




- le quadrilatère $ACBD$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu : c'est un parallélogramme;
- le parallélogramme $ACBD$ a des diagonales de même longueur : c'est un rectangle;
- $ACBD$ est un rectangle donc $\widehat{ACB} = 90°$

# II cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

## II - 1) définitions




**cosinus** de l'angle $\widehat{BAC}$ :

$$cos(\widehat{BAC}) = \frac{\text{longueur du côté } \textbf{adjacent} \text{ à l'angle}}{\text{longueur de l'}\textbf{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC}$$

**sinus** de l'angle $\widehat{BAC}$ :

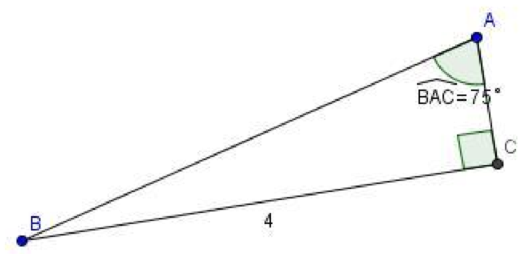
$$sin(\widehat{BAC}) = \frac{\text{longueur du côté } \textbf{opposé} \text{ à l'angle}}{\text{longueur de l'}\textbf{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

**tangente** de l'angle $\widehat{BAC}$ :

$$tan(\widehat{BAC}) = \frac{\text{longueur du côté } \textbf{opposé} \text{ à l'angle}}{\text{longueur du côté } \textbf{adjacent} \text{ à l'angle}} = \frac{AC}{AB}$$

## II - 2) calcul de longueurs

Dans un triangle rectangle, connaissant une longueur et un angle, on peut connaître la longueur des autres côtés.




On veut calculer la longueur du segment $[BA]$ :

- $sin(\widehat{BAC}) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{BA} = \frac{4}{BA}$.
- Cela donne : $sin(75) = \frac{4}{BA}$.
- On fait évoluer l'expression pour isoler $BA$ : $sin(75) \times BA = 4$ et donc : $BA = \frac{4}{sin(75)}$.

- On a trouvé la **valeur exacte** : $\boxed{BA = \frac{4}{sin(75)}}$.
- Avec la calculatrice, on obtient une **valeur approchée** au millimètre : $BA \approx 4,2$ cm.

*Remarques* :

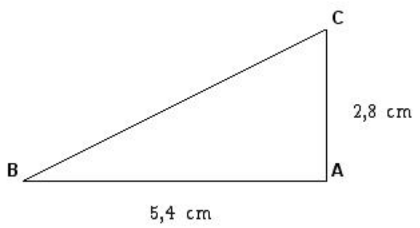
- au départ, si on ne sait pas s'il faut utiliser *cosinus*, *sinus* ou *tangente*, les essayer chacun leur tour et voir lequel est adapté à l'exercice.

- bien vérifier que la calculatrice est réglée pour des angles en degrés **(DEG)**.

- penser à **vérifier si le résultat est cohérent** : trouver l'hypoténuse plus petit qu'un autre côté ne va pas !

## II - 3) calcul d'angles

Dans un triangle rectangle, connaissant deux longueurs, on peut connaître les mesures des angles.




On veut calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ :

- $tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \dfrac{AC}{AC} = \dfrac{2,8}{5,4}$.
- On utilise alors la calculatrice, avec la touche « $\tan^{-1}$ »ou « Atan ».

- On tape : « $2,8 \div 5,4$ EXE »puis « $\tan^{-1}$ ANS ».

- On a trouvé une **valeur approchée**, au dixième de degré : $\boxed{\widehat{ABC} \approx 27,4°}$.

## II - 4) deux formules de trigonométrie

Pour tout angle aigu de mesure $\alpha$, on a :

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad cos(\alpha)^2 + (sin(\alpha)^2 = 1$$

*Remarque* : ces deux formules peuvent se démontrer.

*exemple* :

$x$ est la mesure d'un angle tel que : $sin(x) = 0,6$

Calcul du cosinus de cet angle :

On a : $(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$

Ainsi : $(cos(x))^2 + 0,6^2 = 1$

On en déduit que : $(cos(x))^2 = 1 - 0,36 = 0,64$

Par conséquent, comme $cos(x) > 0$, on a : $cos(x) = \sqrt{0,64}$, donc $cos(x) = 0,8$