Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

En 2010, on pouvait lire sur un site attaché à WWF : « De 1 200 individus en 1998, la population [des tigres du Grand Mékong] est ainsi passée à moins de 350 survivants répartis sur le territoire de cinq pays de la région : Cambodge, Laos, Myanmar, Thaïlande et Vietnam. »

1. (a) *Calculer le taux d'évolution de la population des tigres du Grand Mékong entre 1998 et 2010.*

   On note k le coefficient multiplicatif permettant de passer de 1 200 à 350.

   On a : $1\ 200 \times k = 350$ ce qui donne : $k = \dfrac{350}{1\ 200} \approx 0,29$

   Ce coefficient traduit une baisse de $1 - 0,29 = 0,71 = 71\%$.

   (b) *Montrer que cette évolution correspond à une baisse moyenne d'environ 9,76 % par an.*

   Il faut considérer 12 baisses successives de 9,76%.

   Chaque baisse de 9,76% se traduit par un coefficient multiplicateur égal à :
   $1 - 0,0976 \approx 0,9024$.

   12 baisses successives se traduisent par :
   $k_{12 \text{ baisses}} = \underbrace{0,9024 \times 0,9024 \times \ldots \times 0,9024}_{12 \text{ fois}} = 0,9024^{12} \approx 0,29$

   C'est bien le coefficient calculé à la question 1a) qui traduit une baisse de 71%.

2. (a) *Estimer la population des tigres en 2000, 2001 et 2002.*

   Le principe est de considérer une baisse moyenne de 9,76% par an à partir de 1998.

   Ainsi, pour 2000, la population a baissé de 9,76% 2 années de suite (à partir de 1998).

   La population est estimée par : $1\ 200 \times k^2 \approx 1\ 200 \times 0,9024^2 \approx 977$ tigres.

   En 2001 : $1\ 200 \times k^3 \approx 1\ 200 \times 0,9024^3 \approx 882$ tigres.

   En 2002 : $1\ 200 \times k^4 \approx 1\ 200 \times 0,9024^4 \approx 796$ tigres.

   (b) *Si cette baisse moyenne se confirme dans l'avenir, combien de tigres du Grand Mékong restera-t-il en 2015 ?*

   Il faudra considérer à nouveau 5 baisses successives de 9,76% à partir de 2010.

   Cela donnerait une population de : $350 \times k^5 \approx 350 \times 0,9024^5 \approx 209$ tigres.

   (c) *A l'aide de la calculatrice, chercher à partir de quelle année la population de cette espèce de fauve passera sous la barre des 50 individus.*

   Il faut faire des essais : à partir de quelle valeur de n a-t-on $350 \times 0,9024^n < 50$?

   Pour $n = 18$, le résultat donne 55 tigres.

   Pour $n = 19$, le résultat donne 50 tigres.

   Ce serait donc à partir de 2029 que la population passerait en-dessous de 50 tigres.

Exercice 2 :

1. *On considère la série de nombres : -3 ; 2 ; 6 et 7.*

   Calculer la moyenne m, la variance V et l'écart-type σ cette série.

   On peut utiliser la calculatrice : $m = 3$; $V = 15,5$; $\sigma = \sqrt{15} \approx 3,9$.

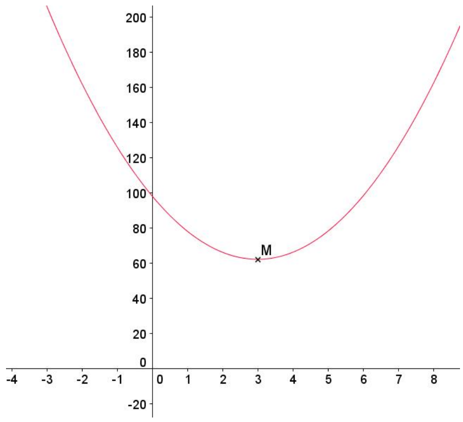
2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = (-3-x)^2+(2-x)^2+(6-x)^2+(7-x)^2$

   (a) *Développer chaque carré de cette somme et en déduire la forme réduite et ordonnée de $f(x)$.*

   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (-3-x)^2+(2-x)^2+(6-x)^2+(7-x)^2 \\ & = & 9+6x+x^2+4-4x+x^2+36-12x+x^2+49-14x+x^2 \\ & = & 4x^2-24x+98 \end{array}$$

   (b) *Déterminer le réel a où $f(x)$ atteint son minimum.*

   approche graphique : on peut tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère et **conjecturer** la valeur minimum :



   D'après ce graphique, on conjecture que le minimum est atteint en $x = 3$.

   approche algébrique : le principe est le suivant :
   1. écrire le polynôme du second degré sous la forme canonique ;
   2. faire la différence entre la fonction et la valeur du minimum conjecturée ;
   3. montrer que cette différence a un signe constant.

   étape n°1 :

   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 4x^2-24x+98 \\ & = & 4(x^2-6x+24,5) \\ & = & 4((x-3)^2-3^2+24,5) \\ & = & 4((x-3)^2+15,5) \end{array}$$

   étape n°2 :

   $$\begin{array}{rcl} f(x)-f(3) & = & 4((x-3)^2+15,5)-(4\times 3^2-24\times 3+98) \\ & = & 4(x-3)^2+4\times 15,5-62 \\ & = & 4(x-3)^2 \end{array}$$

   étape n°3 : $f(x)-f(3) = 4(x-3)^2 \geqslant 0$

   Conclusion : pour toute valeur de x, $f(x) \geqslant f(3)$.

   Cela veut exactement dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 3$.

(c) *Calculer le minimum de $f(x)$.*
Le minimum de la fonction f est donc la valeur en 3 :
$f(3) = 4 \times 3^2 - 24 \times 3 + 98 = 62$

3. *Faire le lien entre les résultats de la question 1. et ceux de la question 2.*

   On peut considérer la quantité $(-3-x)^2$ comme une distance entre une abscisse x et l'abscisse (-3).

   De même pour les quantités $(2-x)^2$, $(6-x)^2$ et $(7-x)^2$.

   Ainsi, la fonction f peut être vue comme la somme des distances entre une abscisse x et les abscisses -3, 2, 6 et 7.

   Chercher le minimum de cette fonction, c'est chercher la valeur de l'abscisse qui rend minimum cette distance.

   Ainsi, d'après ce qui précède, **c'est exactement à la moyenne qu'on minimise la distance** (au sens défini précédemment) **entre les valeurs proposées**.

   La définition de la fonction f est (au facteur 4 près qui n'a pas été mis pour faciliter les calculs) est une expression qui ressemble fortement à l'expression de la variance ...

   Et donc, ce « minimum de distance » est atteint en la valeur moyenne et est égal à la variance de la série de nombres.

   En effet, le minimum de la fonction f est 62 ; or, $62 \div 4 = 15,5$ qui est bien la valeur de la variance de la série de nombres.