Chapitre 8

Droites et plans de l'espace - Vecteurs

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
étude de la position relative de droite(s) et de plan(s)						
vecteurs de l'espace						
formules dans un repère de l'espace						
représentation paramétrique d'une droite, d'un plan						

1) Positions relatives de droites et de plans

1 - 1) Définitions

Définition :

(1) Deux **droites parallèles** sont deux droites coplanaires qui n'ont pas de point commun, ou qui sont confondues.

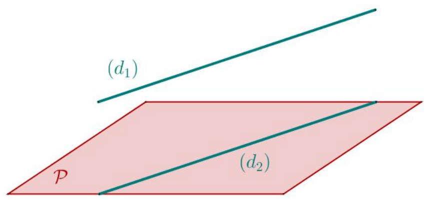
(2) Deux **plans parallèles** sont deux plans qui n'ont pas de point commun ou qui sont confondus.

(3) Une **droite est parallèle à un plan** si elle n'a pas de point commun avec le plan, ou si elle est située dans le plan.

1 - 2) Parallélisme d'une droite et d'un plan

Propriété :

Si une droite (d_1) est parallèle à une droite (d_2) d'un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (d_1) est parallèle au plan $\mathcal{P}$.



Démonstration :

Si la droite (d_1) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$, alors elle lui est parallèle.

Sinon, (d_1) et (d_2) sont strictement parallèles et elles définissent un plan $\mathcal{R}$. La droite (d_2) est donc l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

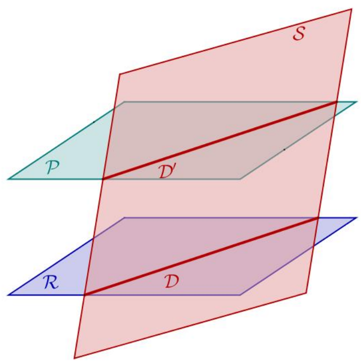
Si la droite (d_1) coupait le plan $\mathcal{P}$ en un point, ce point commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ serait commun aux droites (d_1) et (d_2), ce qui contredirait le fait que ces deux droites sont parallèles.

On conclut donc que la droite (d_1) n'a aucun point commun avec le plan $\mathcal{P}$.

1 - 3) Parallélisme de deux droites

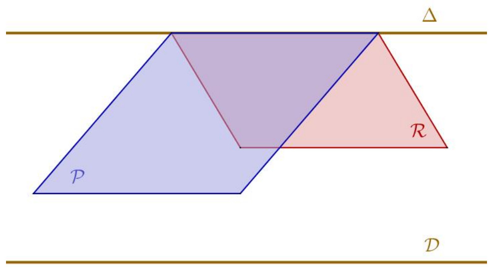
Propriété (*admise*) :

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont strictement parallèles, tout plan $\mathcal{S}$ qui coupe le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan $\mathcal{R}$ et les droites d'intersection sont parallèles.



Théorème du toit :

Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite Δ d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.



Démonstration :

Soit A un point de Δ et $\mathcal{D}'$ la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A.

La droite $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ et A est un point de $\mathcal{P}$, donc $\mathcal{D}'$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

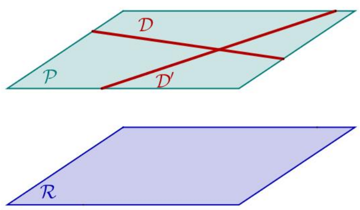
De même, $\mathcal{D}'$ est incluse dans $\mathcal{R}$.

On en déduit que $\mathcal{D}'$ est confondue avec Δ : $\mathcal{D}$ et Δ sont donc parallèles.

1 - 4) Parallélisme de deux plans

Propriété :

Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes et toutes deux parallèles à un plan $\mathcal{R}$, alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont parallèles.



Démonstration :

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont confondus, ces deux plans sont parallèles.

Sinon, ils sont distincts.

La droite $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{R}$ et incluse dans $\mathcal{P}$, donc parallèle à $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ étaient sécants, alors leur droite d'intersection Δ serait parallèle à $\mathcal{D}$ d'après le théorème du toit. De même, Δ serait parallèle à $\mathcal{D}'$; $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ seraient donc parallèles, ce qui est impossible car ces droites sont sécantes.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont donc parallèles.

Corollaire :

Si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites d'un plan $\mathcal{R}$, alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont parallèles.

2) Les vecteurs de l'espace

2 - 1) Notion de vecteur de l'espace

Les définitions et les calculs sur les vecteurs du plan peuvent être étendus à l'espace.

Définitions :

(1) Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $\vec{v} = k\,\vec{u}$, avec k un réel

Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

(2) Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

(3) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2 - 2) Caractérisation vectorielle d'une droite, d'un plan

Caractérisation d'une droite :

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\vec{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est la droite (AB), avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

On dit que **$\vec{u}$ est un vecteur directeur** de la droite (AB).

Caractérisation d'un plan :

Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ est le plan (ABC), avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Démonstration :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les droites (AB) et (AC) sont sécantes et définissent bien le plan (ABC).

Soit M un point vérifiant : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

On considère le point N du plan (ABC) qui admet pour coordonnées $(\lambda\ ;\ \mu)$ dans le repère (A, B, C) ; alors : $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

Ainsi, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ donc M et N sont confondus : $N \in (ABC)$.

Réciproquement, tout point M du plan (ABC) admet dans le repère (A, B, C) des coordonnées $(\lambda\ ;\ \mu)$ telles que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

CONSÉQUENCES :

* Deux droites sont parallèles si, et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

* Deux plans ayant le même couple de vecteurs directeurs sont parallèles.

2 - 3) Décomposition de vecteurs

Vecteurs coplanaires

Définition :

Des vecteurs sont **coplanaires** si, et seulement si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, tels que **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires**.

Les vecteurs **$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires** si, et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$$

DÉMONSTRATION :

Soient A, B, C et D des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non colinéaires, les points A, B et C définissent un plan dont $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est un repère.

Par définition : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow D \in (ABC)$

D'après la caractérisation vectorielle d'un plan, $D \in (ABC)$ équivaut à : il existe un couple de réels $(\lambda\ ;\ \mu)$ tels que $\vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$

Ainsi, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$, avec λ et μ réels

Vecteurs non coplanaires

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace, alors pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(\lambda\ ;\ \mu\ ;\ \nu)$ de réels tels que : $\vec{t} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}\ + \nu\,\vec{w}$

Démonstration :

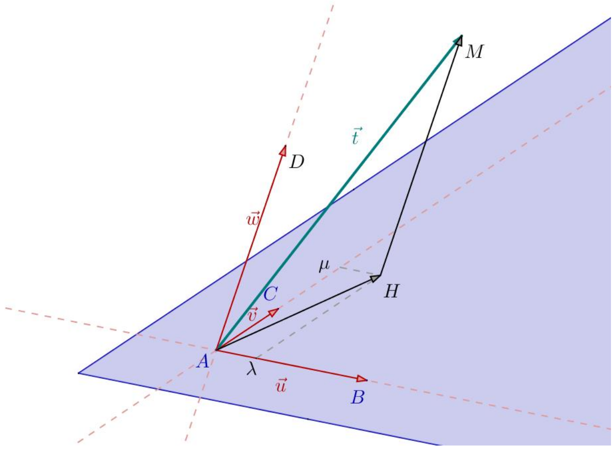
Existence

Soient A, B, C, D et M des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{t} = \overrightarrow{AM}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, sinon $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient coplanaires ; ainsi, A, B et C définissent un plan dont $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est un repère.

La parallèle à la droite (AD) passant par M, dirigée par $\vec{w}$, qui n'est pas un vecteur du plan (ABC) puisque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, est sécante à ce plan en un point H.

$\overrightarrow{HM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, donc $\overrightarrow{HM} = \nu\,\vec{w}$, où ν est un réel, et H appartient au plan (ABC), donc $\overrightarrow{AH} = \lambda\ \vec{u} + \mu\ \vec{v}$ avec λ et ν réels.



Comme $\vec{t} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{HM}$, on obtient en fait l'existence d'un triplet de réels $(\lambda\ ;\ \mu\ ;\ \nu)$ tel que $\vec{t} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}\ + \nu\,\vec{w}$

Unicité

On suppose qu'on a l'écriture $\vec{t} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}\ + \nu\,\vec{w} = \lambda'\,\vec{u} + \mu'\,\vec{v}\ + \nu'\,\vec{w}$

Alors $(\lambda - \lambda')\,\vec{u} + (\mu - \mu')\,\vec{v}\ + (\nu - \nu')\,\vec{w} = \vec{0}$; supposons que l'une des trois différences est non nulle, $\nu - \nu'$ par exemple. Après division par $\nu - \nu'$, l'égalité précédente devient :

$$\vec{w} = \frac{\lambda' - \lambda}{\nu - \nu'}\vec{u} + \frac{\mu' - \mu}{\nu - \nu'}\vec{v}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient alors coplanaires, ce qui est exclu. Cela signifie que $\nu = \nu'$ et de manière analogue, $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, ce qui prouve l'unicité de l'écriture.

3) Repères de l'espace

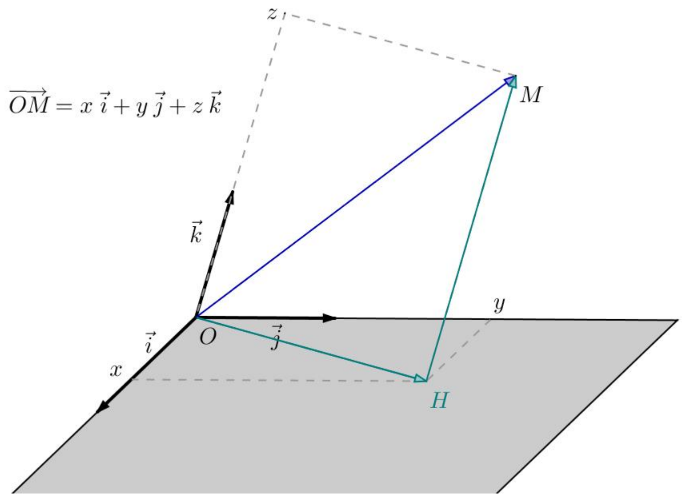
3 - 1) Coordonnées d'un point, d'un vecteur

Théorème et définition :

Soit O un point de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de réels tel que : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est le triplet **des coordonnées du point M dans le repère** $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$



DÉMONSTRATION :

L'existence et l'unicité du triplet de réels $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ pour le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont assurées par la propriété présentée dans le paragraphe précédent, puisque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Formulaire :

L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

(1) Pour deux points $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$$

(2) Coordonnées de M, milieu de $[AB]$: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

(3) Coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC :

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\ ;\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\ ;\ \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

(4) Si $\vec{u}\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y'\ ;\ z')$, alors $\vec{u} + \vec{v}\ (x + x'\ ;\ y + y'\ ;\ z + z')$

et pour tout réel λ, $\lambda\,\vec{u}\ (\lambda\,x\ ;\ \lambda\,y\ ;\ \lambda\,z)$

3 - 2) Représentation paramétrique d'une droite

Propriété :

L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

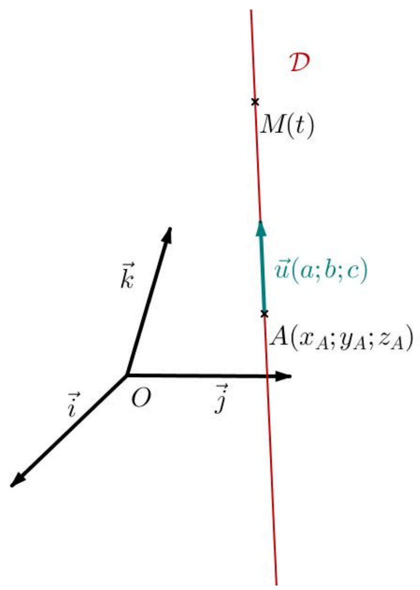
Soit

- $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A\ (x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et **dirigée** par le vecteur $\vec{u}\ (a\ ;\ b\ ;\ c)$
- M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$

On a l'équivalence :

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$$



Démonstration :

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

Or, $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,t \\ b\,t \\ c\,t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$

Exemple :

$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = \quad 4 \\ z = 1 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite Δ passant par $A\ (-2; 4; 1)$, de vecteur directeur $\vec{u}\ (1; 0; -3)$.

Le point $E\ (-3; 4; 4)$ appartient à Δ (prendre -1 pour valeur de t).

Remarque :

Une représentation paramétrique de la droite est **une condition sur les coordonnées d'un point permettant d'affirmer qu'il appartient à cette droite, ou qu'il n'y appartient pas**.

3 - 3) Représentation paramétrique d'un plan

Propriété :

L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

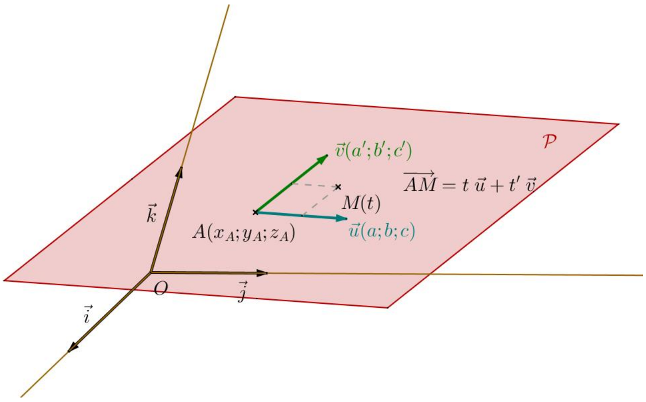
Soit

- $\mathcal{P}$ un plan passant par un point $A\ (x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et **dirigé** par les vecteurs $\vec{u}\ (a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $\vec{v}\ (a'\ ;\ b'\ ;\ c')$
- M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$

On a l'équivalence :

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t + a'\,t' \\ y = y_A + b\,t + b'\,t' \\ z = z_A + c\,t + c'\,t' \end{cases}$$



Démonstration :

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t et un réel t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + t'\,\vec{v}$

Or, $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + t'\,\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,t + a'\,t' \\ b\,t + b'\,t' \\ c\,t + c'\,t' \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + a\,t + a'\,t' \\ y = y_A + b\,t + b'\,t' \\ z = z_A + c\,t + c'\,t' \end{cases}$$

Exemple :

$\begin{cases} x = -2 + t + 3t' \\ y = 4 \\ z = 1 - 3t - 2t' \end{cases}$, $(t\ ;\ t') \in \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A\ (-2; 4; 1)$, de vecteurs directeurs $\vec{u}\ (1; 0; -3)$ et $\vec{v}\ (3; 0; -2)$.

Le point $E\ (-3; 4; 4)$ appartient à $\mathcal{P}$ (prendre -1 pour valeur de t et 0 pour valeur de t').