---

proposition de corrigé

Exercice 1 *(/2 points)*

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,2$

1. Calculer $P(X = 2) \approx 0,231$
2. Calculer $P(X \leqslant 2 \approx 0,398$
3. Calculer $P(X \geqslant 2) \approx 0,833$

Exercice 2 *(/2 points)*

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$; donner la loi de probabilité de X ; peut-on prévoir la valeur pour laquelle la probabilité sera la plus grande ?

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(X = k)$	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	10^{-4}	$6,7.10^{-4}$	0,003	0,014	0,043	0,103	0,188	0,25	0,23	0,13	0,035

La probabilité la plus grande correspond à la valeur de l'espérance :
$E(X) = n \cdot p = 15 \times 0,8 = 12$; on le vérifie à l'aide du tableau précédent.

Exercice 3 *(/2 points)*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,3$.

1. Donner l'intervalle de fluctuation issu de la loi binomiale (donner les valeurs provenant de la loi binomiale cumulée qui permettent de définir les bornes de cet intervalle).

   Pour cela, on utilise la calculatrice et on saisit la loi cumulée $P(X \geqslant k)$ pour k variant de 0 à 200 (à l'aide de la fonction table de la calculatrice)

   On cherche la première valeur de k pour laquelle la probabilité dépasse 0,025 : on trouve $k = 48$ (car $P(X \geqslant 47 \approx 0,02493$ et $P(X \geqslant 47 \approx 0,03595)$

   On cherche la première valeur de k pour laquelle la probabilité dépasse 0,975 : on trouve $k = 73$ (car $P(X \geqslant 72 \approx 0,97157$ et $P(X \geqslant 73 \approx 0,97998)$

   Ainsi, l'intervalle de fluctuation à 95 % pour cette loi est $[48\ ;\ 73]$.
2. Donner l'intervalle de fluctuation pour cette situation issu de la formule $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

   $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,3 - \frac{1}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,3 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,229\ ;\ 0,371]$.
3. Faire le lien entre ces deux intervalles.

   Le premier intervalle est un intervalle en effectif, le second est un intervalle en fréquence ; pour passer de l'un à l'autre, il faut multiplier (ou diviser) par l'effectif total, c'est-à-dire 200 : en multipliant par 200, $[0,229\ ;\ 0,371]$ devient $[46\ ;\ 74]$; cet intervalle en effectif obtenu par cette méthode contient l'intervalle obtenu à l'aide de la loi binomiale (ce sera toujours le cas).

***Exercice* 4** *\/2 points*

On vous indique que sur terre il y a 12 % de gauchers. 8 des 50 meilleurs joueurs de tennis sont gauchers. A partir de ces données, peut-on affirmer que les gauchers sont spécialement favorisés au tennis ? (on attend une réponse argumentée par des calculs en lien avec la loi binomiale)

On calcule $P(X \geqslant 8)$ où X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,12$; on obtient : $P(X \geqslant 8) \approx 0,86$

Comme cette valeur est supérieure à 0,025, et inférieure à 0,975, on conclut que 8 est dans l'intervalle de fluctuation à 95 % de la loi binomiale étudiée.

On conclut qu'avec ces valeurs, rien n'indique que les gauchers sont spécialement favorisés au tennis.

***Exercice* 5** *\/2 points*

Pour démarrer une partie de petits chevaux, il faut que le dé sorte sur le numéro 6. Vous savez que vous avez une chance sur six de tomber sur le numéro 6 (avec un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, dé non truqué).

Combien faut-il faire d'essais, au minimum, pour être sûr de tomber au moins une fois sur le numéro 6 et pouvoir ainsi démarrer la partie ; être sûr signifie par exemple que la probabilité de tomber au moins une fois sur un numéro 6 est supérieure à 0,99.

On considère un lancer de dé à 6 faces (dé bien équilibré), avec comme succès le fait de tomber sur le numéro 6 ; ce succès a une probabilité de réalisation (p) égale à $\frac{1}{6}$. Le résultat d'un lancer n'ayant pas d'influence sur le suivant, on est bien dans un schéma de Bernoulli.

Si on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$; il y a n répétitions, valeur inconnue pour le moment.

On cherche à déterminer n pour que : $P(X \geqslant 1) > 0,99$

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leqslant 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times (\frac{1}{6})^0 \times (\frac{5}{6})^n$
ce qui donne $P(X \geqslant 1) = 1 - (\frac{5}{6})^n$

$P(X \geqslant 1) > 0,99$ devient donc $1 - (\frac{5}{6})^n > 0,99$ ce qui revient finalement à $(\frac{5}{6})^n < 0,01$

Pour trouver une valeur de n convenable, on teste à la calculatrice ; on remarque que : $(\frac{5}{6})^{25} \approx 0,0104$ et $(\frac{5}{6})^{26} \approx 0,0087$

Ainsi, après 26 lancers, la probabilité d'avoir au moins un numéro 6 sorti sera supérieure à 0,99.