Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

Dans cet exercice, on considère un repère de l'espace $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; on exprimera les coordonnées des points considérés dans ce repère.

1. On considère la droite (D_1) passant par le point $A(1;0;0)$, dirigée par le vecteur $\vec{d}_1(-1;0;1)$.

Montrer l'équivalence suivante :

$M \in (D_1) \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$M(x;y;z) \in (D_1) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}_1$ sont colinéaires $\iff$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{d}_1$
$\iff$ il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x - 1 = t \times (-1) \\ y - 0 = t \times 0 \\ z - 0 = t \times 1 \end{cases}$$

$\iff$ il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

2. Donner la représentation paramétrique (de paramètre s) de la droite (D_2) passant par le point $B(0;1;0)$, dirigée par le vecteur $\vec{d}_2(1;0;1)$.

$M \in (D_2) \Leftrightarrow$ il existe un réel s tel que :

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = s \end{cases}$$

(D_1) et (D_2) sont-elles sécantes ? Sont-elles parallèles ?

$M(x;y;z) \in (D_1) \cap (D_2) \iff$ il existe deux réels t et s tels que :

$$\begin{cases} x = s = 1 - t \\ y = 1 = 0 \\ z = s = t \end{cases}$$

La relation sur la coordonnée y montre que ce système n'a pas de solution. Ces droites ne sont pas sécantes.

Elles ne sont pas pour autant parallèles ! La preuve : (D_1) est dirigée par $\vec{d}_1(-1;0;1)$, et (D_2) est dirigée par $\vec{d}_2(1;0;1)$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

3. On considère la droite (D_1') passant par le point $A(1;0;0)$, dirigée par le vecteur $\vec{d_1'}(-1;0;2)$.

Justifier que (D_1) et (D_1') définissent un plan, que l'on note $\mathscr{P}_1$; donner une représentation paramétrique de ce plan, à l'aide des paramètres t et s.

Ces deux droites sont sécantes (en A) ; elles ne sont pas parallèles (leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires), donc elles définissent un plan.

$M(x;y;z) \in \mathscr{P}_1 \iff$ il existe deux réels t et s tels que :

$$\begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = \quad 0 \\ z = \quad t + 2s \end{cases}$$

4. Montrer que les vecteurs $\vec{d_1}$, $\vec{d_1'}$ et $\vec{d_2}$ sont coplanaires.

Si ces trois vecteurs sont coplanaires, il existe trois réels a, b et c tels que : $a\,\vec{d_1} + b\,\vec{d_1'} + c\,\vec{d_2} = \vec{0}$

Cela se traduit par les relations :

$$\begin{cases} -a - b + c = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Ce système a plusieurs solutions, par exemple : $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$, ce qui montre que :
$3\,\vec{d_1} = -2\,\vec{d_1'} + \vec{d_2}$; ces trois vecteurs sont bien coplanaires.

En déduire la position relative de la droite (D_2) par rapport au plan $\mathscr{P}_1$.

La relation précédente prouve que la droite (D_2) est parallèle au plan $\mathscr{P}_1$ (strictement parallèle).

remarque : on comprend pourquoi elle n'a pas de point commun avec la droite (D_1), incluse dans le plan $\mathscr{P}_1$.

5. Soit (D_2') la droite passant par le point $B(0;1;0)$, dirigée par le vecteur $\vec{d_2'}(1;-1;1)$.

Justifier que B, $\vec{d_2}$ et $\vec{d_2'}$ définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}_2$.

$\vec{d_2}$ et $\vec{d_2'}$ sont deux vecteurs non colinéaires ; les droites (D_2) et (D_2'), sécantes en B définissent la plan $\mathscr{P}_2$.

Quelle est la position relative des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$; on attend des justification et le plus de détails possibles pour décrire cette position relative.

Deux approches possibles :

par la géométrie « pure » : $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts (A appartient à $\mathscr{P}_1$ mais pas à $\mathscr{P}_2$), non parallèles (la droite (D_2') n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}_1$).

L'intersection de ces deux plans est donc une droite. Reste à caractériser cette droite.

Cette droite passe par l'intersection du plan $\mathscr{P}_1$ et de la droite (D_2) ; en résolvant un système, on trouve que ce point d'intersection (notons le I) a pour coordonnées $(1;0;1)$.

Par ailleurs, on sait que la droite (D_2) est parallèle au plan $\mathscr{P}_1$; la droite d'intersection est la droite parallèle à (D_2) passant par I ; étant parallèle à (D_2), elle a pour vecteur directeur $\vec{d}_2$.

par les représentations paramétriques : $M(x; y; z) \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \iff$ il existe 4 réels t, s, m et n tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t - s = m + n \\ y = \quad 0 \quad\; = 1 - n \\ z = \;\; t + 2s \;\; = m + n \end{array}\right.$$

On a utilisé des représentations paramétriques des plans $\mathscr{P}_1$ (déjà faite) et $\mathscr{P}_2$ (se trouve de la même manière que précédemment, donc on donne directement le résultat avec les paramètres m et n).

A l'aide de la coordonnée y, on trouve : $n = 1$; il suffit alors de remplacer n par 1 sur les coordonnées x et z pour tout exprimer en fonction d'un seul paramètre :
$M(x; y; z) \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \iff$ il existe un réel m tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + m \\ y = \quad 0 \\ z = 1 + m \end{array}\right.$$

On reconnaît la représentation paramétrique de la droite qui passe par $I(1; 0; 1)$, dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(1; 0; 1)$ c'est à dire $\vec{d}_2$.

Une représentation graphique de la situation (je ne suis pas certain que ce soit d'une grande aide !)