Proposition de corrigé

***Exercice* 1 :**

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t+\dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

D'après l'indication :
$\displaystyle\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left[-\left(0+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda\times 0}\right] =$
$\displaystyle\frac{1}{\lambda} - \left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]$

2. En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on en déduit avec $\lambda > 0$,
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ et aussi
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\lambda\mathrm{e}^{-x} = 0$.
Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe**.

1. Sur le graphique de l'annexe (à rendre avec la copie) :
   a. Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

On lit comme ordonnée à l'origine $\lambda = 0,5$.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

$E(X) = 2$ signifie que la durée de vie d'un composant est en moyenne égale à 2 ans.

b. Calculer la valeur de λ.

On a vu que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 2 \iff \lambda = 0,5$.

c. Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.

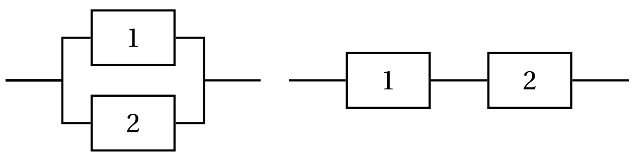
On a :
$P(X \leqslant 2) = \displaystyle\int_0^2 \lambda \mathrm{e}^{-0,5t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0,5t}\right]_0^2 = -\mathrm{e}^{-0,5\times 2} - \left(\mathrm{e}^{-0,5\times 0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} \approx 0,632 \approx 0,63$ au centième près.
Ce résultat est la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à l'espérance $E(X)$.

d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Il faut trouver :
$P_{(X \geqslant 1)}(X \geqslant 3) = P_{(X \geqslant 1)}(X \geqslant 2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0,368$.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

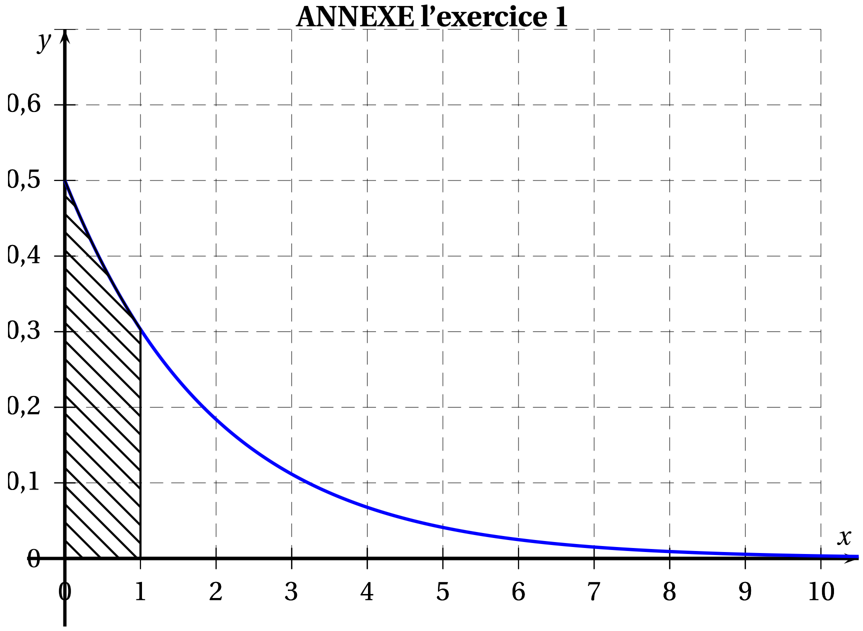
Les évènements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :
$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521$.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Ici la probabilité est égale à :

$P\left(D_1 \cup D_2\right) = P\left(D_1\right) + P\left(D_2\right) - P\left(D_1 \cap D_2\right) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279.$

ANNEXE l'exercice 1



***Exercice* 2** :

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

Par définition, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d$
$= -e^{-\lambda d} - \left(-e^{-\lambda c}\right) = \boxed{e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}}$.

b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

$P(X > 20) = 0,05 \iff P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 0,95 \iff e^{-\lambda\times 0} - e^{-\lambda\times 20} = 0,95 \iff 1 - e^{-20\lambda} = 0,95 \iff e^{-20\lambda} = 0,05 \iff -20\lambda = \ln 0,05 \iff \lambda = \dfrac{\ln 0,05}{-20} \approx \boxed{0,150}$.

c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

On sait que l'espérance d'une loi exponentielle est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \approx \boxed{6,676}$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

d. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

$P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-10\lambda} - e^{-20\lambda} = e^{-1,5} - e^{-3} \approx \boxed{0,173}$.

e. Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.

$P(X > 18) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18) = e^{-18\lambda} = e^{-27} \approx \boxed{0,067}$.