Chapitre 4

Suites

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
définir et représenter graphiquement une suite						
étudier une suite arithmétique						
étudier une suite géométrique						
étudier le sens de variation d'une suite						
modéliser une situation à l'aide d'une suite						

I Qu'est-ce qu'une suite ?

Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres réels, finie ou infinie. Cela signifie que parmi ces nombres, il y a un premier, que nous pourrons noter u_1 (lire « *u indice 1* »), un deuxième u_2 (« *u indice 2* »), un troisième u_3 et, de manière générale, un n-ième u_n (« *u indice n* »).

I - 1) notations et définitions

On note (u_n) la suite u_1, u_2, ... , u_n, u_{n+1}, ... Le nombre u_n est appelé terme d'indice n de la suite (u_n).
Il est parfois commode de noter u_0 le premier terme, ce que nous ferons en général.

exemple :

Posons, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n$.
Nous définissons ainsi la suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$u_0 = 3^0 = 1\,;\ u_1 = 3^1 = 3\,;\ u_2 = 3^2 = 9\,;\ \ldots\,;\ u_{10} = 3^{10} = 59049$$

Attention : (u_n) désigne une suite tandis que u_n sans parenthèses désigne un nombre.

I - 2) modes de génération d'une suite

Il y a deux procédés usuels pour définir une suite.

* **suite définie de manière explicite**
Par exemple : $u_n = n^2 + 2n$
Alors : $u_0 = 0$, $u_1 = 1^2+2\times 1 = 3$, $u_2 = 2^2+2\times 2 = 8$, $u_{n+1} = (n+1)^2+2(n+1) = n^2+4n+3$

* **suite définie par une relation de récurrence**
Ce procédé signifie que l'on donne le premier terme u_0 et une relation permettant de définir chaque terme à partir du précédent.

Un telle relation est appelée une **relation de récurrence**.

Par exemple : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$
On peut alors calculer successivement les termes u_1, u_2, u_3, ...

Ainsi : $u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$; $u_2 = 3u_1 + 1 = 22$; etc.

II Représentation graphique

La **représentation graphique**, dans un repère, des termes d'une suite (u_n) est l'ensemble des **points isolés** de coordonnées $(0; u_0)$, $(1; u_1)$, $(2; u_2)$, ... , $(n; u_n)$, ...

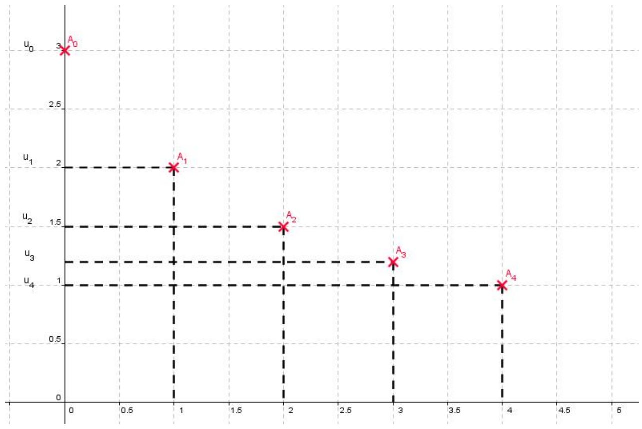
exemple :

On considère la suite (u_n) définie par :

pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{6}{n+2}$

$u_0 = 3\,;\ u_1 = 2\,;\ u_2 = \dfrac{3}{2}\,;\ u_3 = \dfrac{6}{5}\,;\ u_4 = 1$

Les points $A_0(0;3)$, $A_1(1;2)$, $A_2(2;\dfrac{3}{2})$, $A_3(3;\dfrac{6}{5})$, $A_4(4;1)$ sont les cinq premiers points de la représentation graphique de cette suite.



III Sens de variation d'une suite

III - 1) de quoi s'agit-il ?

* lorsque chaque terme d'une suite est strictement inférieur au terme qui le suit, on dit que la suite est strictement croissante.

* lorsque chaque terme d'une suite est strictement supérieur au terme qui le suit, on dit que la suite est strictement décroissante.

définition 1 :

* la suite (u_n) est dite **strictement croissante** lorsque :

$$\boxed{\textbf{pour tout naturel } n\textbf{, } u_n < u_{n+1}}$$

* la suite (u_n) est dite **strictement décroissante** lorsque :

$$\boxed{\textbf{pour tout naturel } n\textbf{, } u_n > u_{n+1}}$$

remarques :

On définit de même une suite croissante en utilisant une inégalité large : $u_n \leq u_{n+1}$

De même, pour une suite décroissante, on remplace $u_n > u_{n+1}$ par $u_n \geq u_{n+1}$

exemples :

* la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 5n + 1$ est strictement croissante.
En effet, pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = 5n + 6 - (5n + 1) = 5$
Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$

* la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n^2 + 4$ est strictement décroissante.
En effet, pour tout naturel n, $v_{n+1} = -(n + 1)^2 + 4 = -(n^2 + 2n + 1) + 4 = -n^2 + 2n + 3$
Donc, $v_{n+1} - v_n = -n^2 - 2n + 3 - (-n^2 + 4) = -2n - 1$
Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n < 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} < v_n$

Attention : une suite peut être ni croissante, ni décroissante ...

Prenons la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = n^2 - 10n + 27$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (n+1)^2 - 10(n+1) + 27 - (n^2 - 10n + 27) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 + 27 - n^2 + 10n - 27 \\ &= 2n - 9 \end{aligned}$$

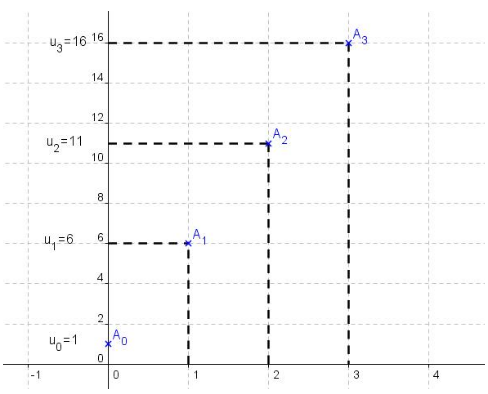
Or, $2n - 9$ est tantôt positif, tantôt négatif, selon les valeurs de l'entier naturel n.
$w_{n+1} - w_n$ n'a pas un signe constant : la suite (w_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

III - 2) interprétation graphique

Représentons graphiquement les suites (u_n) et (v_n) définies précédemment :

$u_n = 5n + 1$

La suite (u_n) est strictement croissante ; sa représentation graphique est la suivante :



$v_n = -n^2 + 4$

La suite (v_n) est strictement décroissante ; sa représentation graphique est la suivante :

IV suites arithmétiques

IV - 1) qu'est-ce qu'une suite arithmétique ?

Lorsque pour une suite (u_n), on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en ajoutant toujours le même nombre fixe, on dit que la suite (u_n) est arithmétique. Plus précisément :

définition 2 :

Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout naturel n :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n).

exemple :

(u_n) est une suite arithmétique de raison (-3) et de premier terme $u_0 = 8$.
Alors : $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = -1$, ...

remarque : le réel r peut être positif ou négatif.

Si $r = 0$, alors tous les termes de la suite sont égaux : la suite est **constante**.

IV - 2) calcul de u_n lorsqu'on connaît u_0 et r

théorème 1 :

1. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout naturel n :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

2. Réciproquement :
si pour tout naturel n, $u_n = b + an$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a.

démonstration :

On utilise la définition d'une suite arithmétique.

1. $u_1 = u_0 + r$ et $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$
et ainsi, de proche en proche, on obtient $u_3 = u_0 + 3r$, ... , $u_n = u_0 + nr$

2. $u_{n+1} - u_n = b + a(n + 1) - (b + an) = a$, d'où le résultat.

exemples :

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_0 = 5$ et $r = 3$.
Alors $u_{50} = 5 + 50 \times 3 = 155$

2. (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 + 8n$.
Alors (u_n) est une suite arithmétique de raison 8.

IV - 3) calcul de u_n lorsqu'on connaît u_p et r

théorème 2 :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.
Alors, pour tout naturel n et tout naturel p :

$$\boxed{u_n = u_p + (n - p)r}$$

démonstration :

On utilise la formule $u_n = u_0 + nr$.

$u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$
Donc $u_n - u_p = nr - np$; d'où $u_n = u_p + (n - p)r$

remarque : si $p = 0$, on retrouve le théorème 1.

exemple : (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{15} = 9$ et $r = 1,5$.

On peut alors calculer rapidement n'importe quel terme de la suite ; calculons u_{32}, u_2 et u_0 :
* $u_{32} = u_{15} + (32 - 15)r = 9 + 17 \times 1,5 = 34,5$
* $u_2 = u_{15} + (2 - 15)r = 9 - 13 \times 1,5 = -10,5$
* $u_0 = u_{15} + (0 - 15) \times 1,5 = 9 - 15 \times 1,5 = -13,5$

IV - 4) sens de variation d'une suite arithmétique

théorème 3 :

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :

* si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.

* si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.

démonstration :

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_0, alors pour tout naturel n :
$u_{n+1} - u_n = (u_n + r) - u_n = r$
* si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: la suite est strictement croissante.
* si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est strictement décroissante.

IV - 5) représentation graphique d'une suite arithmétique

théorème 4 :

> La représentation graphique des termes d'une suite arithmétique est un ensemble de points isolés **alignés**.

démonstration :

> On utilise la formule $u_n = u_0 + nr$.
>
> Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a vu que pour tout naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
> Tous les points $(n; u_n)$ se trouvent donc sur la droite d d'équation $y = rx + u_0$

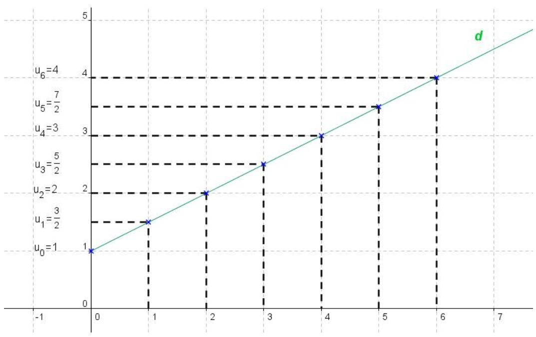
exemples :

(u_n) est la suite arithmétique telle que :

$$u_0 = 1 \text{ et } r = \frac{1}{2}$$

d est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$

Les sept premiers points de la représentation graphique de la suite et la droite d sont représentés sur la figure ci-dessous.

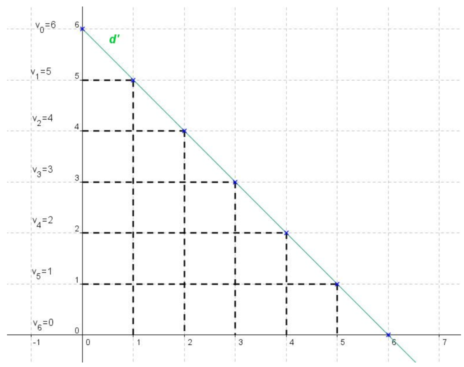


(v_n) est la suite arithmétique telle que :

$$v_0 = 6 \text{ et } r = -1$$

d' est la droite d'équation $y = -x + 6$

Les sept premiers points de la représentation graphique de la suite et la droite d' sont représentés sur la figure ci-dessous.



V suites géométriques

V - 1) qu'est-ce qu'une suite géométrique ?

Lorsque pour une suite (u_n), on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en multipliant toujours le même nombre fixe *(ce nombre doit être positif)*, on dit que la suite (u_n) est géométrique.
Plus précisément :

définition 3 :

Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** de raison strictement positive signifie qu'il existe un réel $q > 0$ tel que, pour tout naturel n :

$$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

exemple :

(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 2$.
Alors : $u_1 = 5 \times u_0 = 10$, $u_2 = 5 \times u_1 = 50$ ...

V - 2) calcul de u_n lorsqu'on connaît u_0 et q

théorème 5 :

1. Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$, alors pour tout naturel n :

$$\boxed{u_n = q^n u_0}$$

2. Réciproquement :
si pour tout naturel n, $u_n = ba^n$ $(a > 0)$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison a.

démonstration :

On utilise la définition d'une suite géométrique.

1. $u_1 = qu_0$ et $u_2 = qu_1 = q(qu_0) = q^2u_0$
et ainsi, de proche en proche, on obtient $u_3 = q^3u_0$, ... , $u_n = q^nu_0$

2. $u_{n+1} = ba^{n+1} = b(a^n) \times a = u_n \times a$, d'où le résultat.

exemples :

1. (u_n) est une suite géométrique telle que : $u_0 = 3$ et $q = \dfrac{1}{2}$.

Alors $u_6 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \times 3 = \dfrac{3}{2^6} = \dfrac{3}{64}$

2. (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4^n \times 5$.
Alors (u_n) est une suite géométrique de raison 4.

V - 3) calcul de u_n lorsqu'on connaît u_p et q

théorème 6 :

(u_n) est une suite géométrique de raison q.
Alors, pour tout naturel n et tout naturel p :

$$\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$$

démonstration :

On utilise la formule $u_n = u_0 q^n$.

$u_n = u_0 q^n$ et $u_p = u_0 q^p$
Comme $q \neq 0$, $u_p = u_0 q^p$ peut aussi s'écrire : $u_0 = \dfrac{u_p}{q^p}$
On remplace u_0 par cette expression dans $u_n = u_0 q^n$ et on obtient :

$$u_n = \frac{u_p}{q^p} \times q^n = u_p \frac{q^n}{q^p} = u_p q^{n-p}$$

remarque : si $p = 0$, on retrouve le théorème 5.

exemple : (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{9}{2}$ et telle que $u_{10} = 5$.

On peut alors calculer rapidement n'importe quel terme de la suite ; calculons u_{50}, u_6 et u_0 :

* $u_{50} = u_{10} \times q^{50-10} = 5 \times \left(\dfrac{9}{2}\right)^{40}$
* $u_6 = u_{10} \times q^{6-10} = 5 \times \left(\dfrac{9}{2}\right)^{-4} = 5 \times \dfrac{2^4}{9^4}$
* $u_0 = u_{10} \times q^{0-10} = 5 \times \left(\dfrac{9}{2}\right)^{-10} = 5 \times \dfrac{2^{10}}{9^{10}}$

V - 4) sens de variation d'une suite géométrique

théorème 7 :

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q (avec $q > 0$), **de premier terme u_0 strictement positif**, alors :

* si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante.

* si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

démonstration :

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$, de premier terme $u_0 > 0$, alors pour tout naturel n :
$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q - 1)$
Comme on a supposé $u_0 > 0$, q étant lui aussi positif, la différence $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $q - 1$

* si $q > 1$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: la suite est strictement croissante.
* si $q < 1$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est strictement décroissante.

V - 5) représentation graphique d'une suite géométrique : évolution exponentielle

exemples :

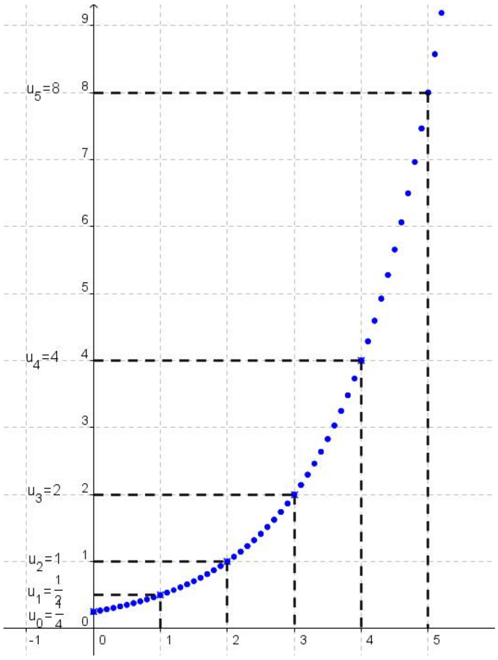
(u_n) est la suite géométrique telle que :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } q = 2$$

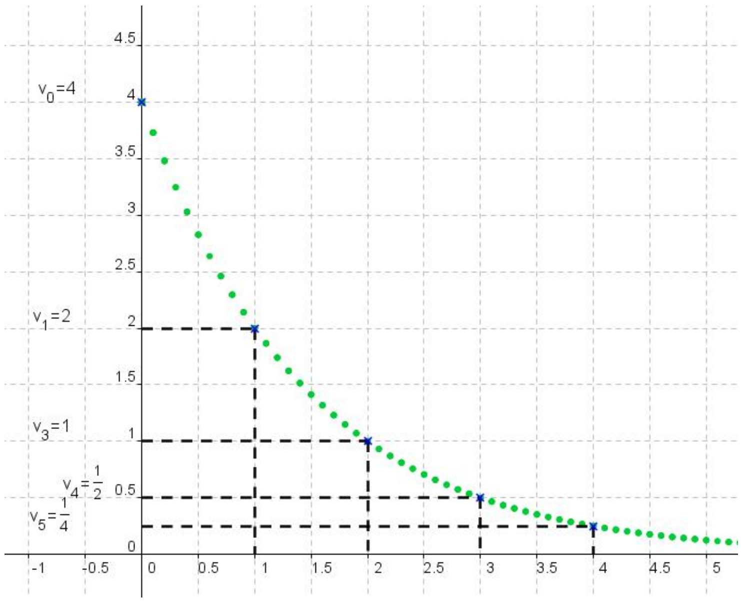
(v_n) est la suite géométrique telle que :

$$v_0 = 4 \text{ et } q = \frac{1}{2}$$

Pour chaque suite, on représente les six premiers termes de la suite et on relie les points ainsi obtenus.



suite (u_n) de raison 2



suite (v_n) de raison $\frac{1}{2}$