ACADÉMIE
DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades inter-académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 26 mars 2024

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à ***rédiger sur leurs copies*** les solutions qu'ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

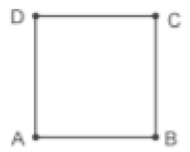
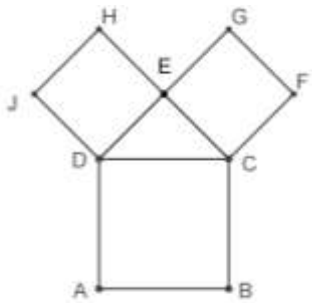
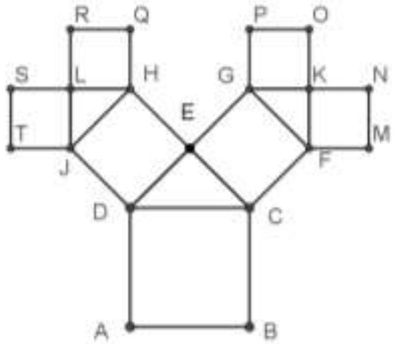
Avec le partenariat de

Crédit Mutuel Enseignant
CASIO
Texas Instruments
NUMWORKS
Inria Inventeurs du monde numérique
Université Grenoble Alpes

Exercice 1
Arbre de Pythagore

- On considère un carré ABCD.
- À l'extérieur de ce carré, on construit le triangle CDE, isocèle et rectangle en E. À l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés CFGE et DEHJ.
- On réalise deux constructions analogues à partir des carrés CFGE et DEHJ, sans chevauchement.

Voici ci-dessous les trois premières étapes de la construction.

		
Un carré : figure à l'ordre 0	Trois carrés : figure à l'ordre 1	Sept carrés : figure à l'ordre 2

1. ***a.*** Montrer que l'aire du carré ABCD est la somme des aires des carrés CFGE et DEHJ.
   b. Montrer que le côté du carré ABCD est le double de celui du carré FMNK.

2. ***a.*** Montrer que les points B, C, G et P sont alignés.
   b. Montrer que les points N, K, G, H, L et S sont alignés.

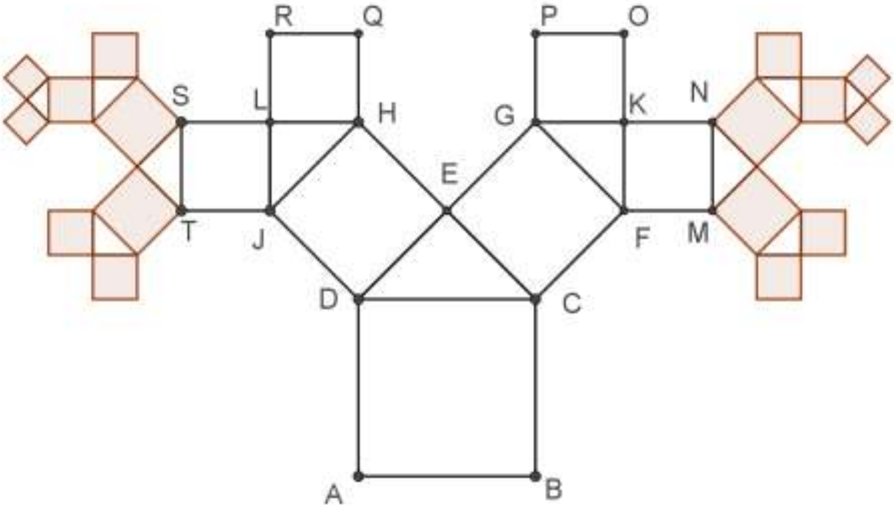
3. Le côté du carré ABCD mesure 1 m.
   a. Quelle est la hauteur de la figure à l'ordre 2 ? Quelle est sa largeur ?
   b. On veut réaliser une fresque murale en poursuivant le processus de construction décrit ci-dessus.
   Combien cette fresque contiendra-t-elle de carrés si elle orne un mur de largeur 5 m ?

Éléments de correction

1. ***a.*** Le théorème de Pythagore appliqué au triangle CDE, rectangle en E, fournit l'égalité :
   $CD^2 = EC^2 + DE^2$
   Comme $EC = ED$, cette égalité répond exactement à la question.
   b. On passe à l'ordre suivant pour obtenir $CE^2 = 4FM^2$

2. ***a.*** Les points B, C et G sont alignés (la mesure de l'angle $\widehat{BCG}$ est la somme de 90°, 45° et 45°). Les points C, G et P sont eux aussi alignés (la configuration est la même à une symétrie près). Donc les points B et P appartiennent à la droite (CG).
   b. Les points N et K appartiennent à la droite (GH) (toujours la même configuration) et les points S et L appartiennent à la droite (GH) également. Il y a donc un alignement de six points.

3. Le côté du carré ABCD mesure 1 m.
   a. La figure est inscrite dans le rectangle dont les côtés sont supportés par les droites (AB) et (PO) d'une part, (MN) et (ST) d'autre part. La hauteur de la figure est la distance BP, sa largeur la distance SN. La longueur des côtés des carrés est à chaque étape multipliée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $BP = 2{,}5$ et $SN = 3$.
   b. Le schéma ci-dessous est **une vue partielle** de la figure à l'ordre 5. Selon le principe évoqué ci-dessus, sa largeur, une fois achevé, est 5 m. C'est l'arbre de Pythagore à l'ordre 5. Il comporte
   $1 + 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 63$ carrés.


R
Q
P
O
S
L
H
G
K
N
E
T
J
F
M
D
C
A
B

Exercice 2
Le cycle des unités

Soit n un entier naturel non nul, les puissances de 2 s'écrivent ainsi :

$2^1 = 2 \qquad 2^2 = 2 \times 2 \qquad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \qquad 2^n = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n\ facteurs\ égaux\ à\ 2}$

Dans cet exercice, les nombres sont représentés dans le système décimal. Le tableau ci-dessous donne la liste des premières puissances de 2 :

Exposant n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	…	…	…
Chiffre des unités de 2^n	2	4	8	6	2	4	8	…	…	…

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
2. ***a.*** Quels sont les chiffres des unités des puissances successives de 3 ?
   b. Quels sont les chiffres des unités des puissances successives de 6 ?
   c. Quels sont les chiffres des unités des puissances de 16 ? de $123\,456\,789$?
3. La division euclidienne de 47 par 4 a pour quotient 11 et pour reste 3. Par conséquent, le chiffre des unités de $2^{47} = 2^{4\times 11+3}$ est le même que celui de 2^3 c'est-à-dire 8.
   Déterminer le chiffre des unités de $2^{1\,515}$ puis de $2^{1\,789}$.
4. ***a.*** Quel est le chiffre des unités de la somme $S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{2\,022} + 2^{2\,023} + 2^{2\,024}$?
   b. Quel est le chiffre des unités de la somme $T = 9 + 81 + 729 + \cdots + 9^{2\,022} + 9^{2\,023} + 9^{2\,024}$?

Éléments de correction

1. premières puissances de 2 :

Exposant n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	256	512	1 024
Chiffre des unités de 2^n	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4

2. Le chiffre des unités du produit de deux entiers écrits dans le système décimal est le chiffre des unités du produit de leurs chiffres des unités.
   a. Les puissances de 3 ont pour chiffre des unités 3, 9, 7, 1, cette séquence se reproduit.
   b. $6 \times 6 = 36$. 6 est le chiffre des unités de toutes les puissances de 6.
   c. Pour 16, terminé par 6, on ne trouve que des 6.
   Pour 123 456 789, on trouve les chiffres des unités des puissances de 9.
3. $1\,515 = 4 \times 378 + 3$. Dans la suite 2-4-8-6, c'est le troisième chiffre qui sert de chiffre des unités, donc 8.
   $1\,789 = 4 \times 447 + 1$. Cette fois, c'est 2.
4. Le chiffre des unités d'une somme est le chiffre des unités de la somme des chiffres des unités des nombres à sommer.
   a. Dans la somme S apparaissent successivement 2-4-8-6. Comme $2\,024 = 4 \times 506$, la suite des quatre chiffres des unités apparaît 506 fois. La somme de ces quatre chiffres est 20 et le produit de 506 par 20 se termine bien sûr par un 0.
   b. Dans cette somme, apparaît la suite 9-1, en tout 1 012 fois. Et comme $9 + 1 = 10$, on se trouve dans la même situation que précédemment.

Exercice 3
Pyramides bicolores

Camille possède un grand nombre de petits cubes blancs et gris. Ces cubes sont assemblés pour construire des tours pyramidales en alternant les couleurs, comme sur les dessins ci-contre.

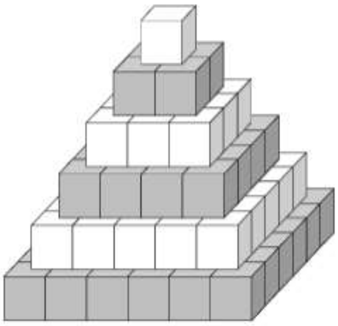


Figure 1

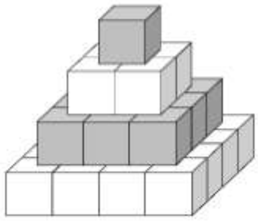


Figure 2

Les règles de construction sont fixées comme suit :
- chaque étage est à base carrée et formé de cubes de la même couleur ;
- deux étages successifs sont de couleurs différentes ;
- d'un étage à l'étage supérieur, le nombre de cubes sur le côté du carré diminue de 1 ;
- l'étage du bas et l'étage du haut sont de couleurs différentes ;
- l'étage du haut ne comporte qu'un seul cube.

1. Combien de cubes gris et combien de cubes blancs ont été utilisés pour chacune des figures ci-dessus ?
2. Combien de cubes au total sont utilisés pour construire une tour pyramidale de dix étages ?
3. Est-il possible de construire une tour pyramidale en utilisant 818 cubes (on suppose que Camille possède suffisamment de cubes de chaque sorte) ?
4. Poursuivant ses efforts, Camille a construit une tour pyramidale comptant 2 300 cubes blancs. Combien de cubes gris ont été utilisés ?

Éléments de correction

1. La figure 1 comporte $25 + 9 + 1 = 35$ cubes blancs et $36 + 16 + 4 = 56$ cubes gris
   La figure 2 comporte $16 + 4 \ = \ 20$ cubes blancs et $9 + 1 \ = \ 10$ cubes gris
2. Les étages d'une pyramide de 10 étages comportent
   $10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 385$ cubes.
3. On ajoute à la somme précédente 11^2 puis 12^2, etc. jusqu'à atteindre ou dépasser 818.
   $385 + 121 = 506$
   $506 + 144 = 650$
   $650 + 169 = 819$ …
   Il en manque un…

4. Examinons les sommes des carrés des impairs et les sommes des carrés des pairs pour voir si on peut atteindre 2 300. En poursuivant les calculs commencés ci-dessus, on trouve que la somme des carrés des entiers impairs compris entre 1 et 23 est 2 300.
Camille a pu utiliser la somme des carrés des entiers pairs compris en entre 2 et 24 cubes blancs (le premier et le dernier étage ne sont pas de la même couleur) soit 2 600 cubes gris.

Exercice 4

Association mathématique

On dit qu'un couple (a, b), un triplet (a, b, c) ou un quadruplet (a, b, c, d) de nombres rationnels est appelé une *association* si la somme et le produit de ces nombres sont égaux.

Exemples : le couple $(2, 2)$ est une association car $2 + 2 = 2 \times 2$; le couple $(\frac{5}{4}, 5)$ est une association car $\frac{5}{4} + 5 = \frac{5}{4} \times 5$; le triplet $\left(1, 5, \frac{3}{2}\right)$ est une association car $1 + 5 + \frac{3}{2} = 1 \times 5 \times \frac{3}{2}$; le quadruplet $(1, 2, 3, -4)$ n'est pas une association car $1 + 2 + 3 + (-4) \neq 1 \times 2 \times 3 \times (-4)$.

1. **Cas des couples**
   a. Le couple $(0, 0)$ est-il une association ?
   b. Existe-t-il un nombre x tel que le couple $(1, x)$ soit une association ?
   c. Quels sont les nombres x pour lesquels le couple (x, x) est une association ?
   d. Déterminer les nombres x pour lesquels le couple $(3, x)$ est une association.
   e. Soit x un nombre différent de 1. Déterminer, en fonction de x, le nombre y tel que le couple (x, y) est une association.

2. **Cas des triplets**
   a. Montrer que le triplet $(1, 2, 3)$ est une association.
   b. On donne des nombres a et b. Existe-il un nombre x tel que le triplet (a, b, x) soit une association ?

3. **Cas des quadruplets**
   a. Le quadruplet $(a, b, c, 0)$ peut-il être une association ?
   b. Donner un exemple de quadruplet constitué de nombres dont aucun n'est nul et qui est une association.

Éléments de correction

1. **Cas des couples**
   a. $0 + 0 = 0 \times 0$. Le couple $(0,0)$ est une association.
   b. L'équation $1 + x = 1 \times x$ se traduit par $1 = 0$. Elle n'a pas de solution.
   c. L'équation $x + x = x \times x$ s'écrit aussi $x(x - 2) = 0$. Elle possède deux solutions, 0 et 2.
   d. L'équation $x + 3 = 3x$ a pour solution $\frac{3}{2}$. Le couple $(3, \frac{3}{2})$ est une association.
   e. Le couple (x, y) est une association si $x + y = xy$. y est donc solution de l'équation $y(x - 1) = x$ qui n'a de solution que si $x \neq 1$. Sous cette dernière hypothèse $y = \frac{x}{x-1}$.

2. **Cas des triplets**
   a. $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$. Le triplet $(1, 2, 3)$ est une association.
   b. Le triplet (a, b, x) est une association si $a + b + x = abx$. L'équation en x s'écrit $(ab - 1)x = a + b$. Elle n'a de solution que si $ab \neq 1$. Il ne se peut pas que $a + b = 0$ et $ab = 1$
3. **Cas des quadruplets**
   a. Le quadruplet $(a, b, c, 0)$ est une association si $a + b + c = 0$. C'est possible, par exemple $(1, -2, 1, 0)$est une association.
   b. Le quadruplet $(1, 1, 2, 4)$ est une association.